

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

35. Band, Heft 4/6

1. November 1950

S. 145—288

Geschichte.

● **Waerden, B. L. van der: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik.** (Historische Bibliothek für exakte Wissenschaft, VII.) Groningen; P. Noordhoff N. V. 1950. 332 S. 120 Fig., 40 Abb., geb. f. 13.50. [Holländisch].

Das treffliche Werk, in dem die Entwicklung der Mathematik in vorgriechischer und griechischer Zeit nach dem neuesten Stand der historischen Forschung eine umfassende Darstellung erfährt, füllt eine bisher schmerzlich empfundene Lücke. Die Darlegungen bei M. Cantor, D. E. Smith, H. Wieleitner u. a. sind für die fraglichen Zeitabschnitte vielfach veraltet. Man wußte damals noch nichts von den gewaltigen Leistungen der Babylonier. Auch sieht man jetzt über die frühe Entwicklung in Griechenland klarer dank eingehender philologisch-kritischer Untersuchungen über die Mathematik zur Zeit Platons; insbesondere hat sich auch aus einer eingehenden Analyse der Elemente von Euklid (woran der Verf. selbst in hervorragendem Maße beteiligt war) immer mehr herausgestellt, daß diese aus zeitlich und inhaltlich ganz uneinheitlichen Bestandteilen zusammengestellt sind. — So werden vom Verf. erstmalig die Zusammenhänge zwischen der babylonischen und der griechischen Mathematik eingehend erhellt und im einzelnen gezeigt, welche babylonischen Leistungen den Griechen zur Verfügung standen und wie diese aus den überlieferten Einzelkenntnissen etwas vollkommen Neues, die mathematische Wissenschaft, schufen. Die genannten Untersuchungen der Bestandteile der „Elemente“ haben den Verf. auch instand gesetzt, die bisher vielfach nur in neupythagoreischer Verschleierung zugängliche Zahlenlehre der Pythagoreer klarer herauszuschälen und mit ganz besonderer Feinheit und Deutlichkeit die Zeit des Theaitetos und des Eudoxos dem Leser vorzuführen, in der das Irrationale gemeistert und die Mathematik auf die Stufe der Schönheit und Exaktheit gebracht wurde, wie sie uns in den Werken von Euklid, Archimedes und Apollonios gegenübertritt. — Der Stoff des an neuen Gedanken reichen Werkes ist folgendermaßen gegliedert: Kap. I (S. 15—42): Die Ägypter; — Kap. II (S. 43—69): Zahlensysteme, Ziffern und Rechenkunst. Hier wird auch auf die indische Zifferschreibung eingegangen und deren Geschichte bis ins späte Mittelalter verfolgt. Hervorgehoben sei eine Vermutung Freudenthals (S. 64), der zufolge die Positionsschreibung und die Null aus der griechischen Astronomie übernommen wurden. Ein Versehen sei richtig gestellt (S. 68): Das erste Rechenbuch von U. Wagner erschien in Bamberg 1482. — Kap. III (S. 70—91) behandelt die babylonische Mathematik. Hier sind als Material für die Griechen („Geometrische Algebra“) besonders wichtig die babylonischen Lösungsmethoden der quadratischen Gleichungen sowie die erst 1945 bekannt gewordene Keilschrifttafel mit pythagoreischen Zahlentripeln (s. E. M. Bruins, dies. Zbl. 33, 49). Auf die zahlreichen angewandten Probleme wird nicht näher eingegangen? Sind sie wirklich, wie Verf. meint, für die Geschichte der Mathematik ohne große Bedeutung? (S. 90). — Die weiteren Kapitel (IV—VIII) behandeln die griechische Mathematik. In Kap. IV (S. 92—118, Das Zeitalter von Thales und Pythagoras) wird besonders betont, daß Thales es war, der den Beweis in die Geometrie eingeführt hat. — In dem besonders feinen Kap. V (S. 119—164, Das goldene Jahrhundert) bringt Verf. die oben genannte Rekonstruktion der Pythagoreischen Zahlenlehre aus dem 7. und 8. Buch der Elemente, dann den Nachweis, daß alle babylonischen „Normalformen“ der quadratischen Gleichungen sich ohne Ausnahme in der Pythagoreischen Mathematik wiederfinden. Hervorzuheben ist weiterhin die Würdigung der Leistungen des Hippokrates und ein Vorschlag für den Inkommensurabilitätsbeweis des Theodoros (s. van der Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer, dies. Zbl. 32, 49). Der nach dem damaligen Stand der Wissenschaft unverständliche Tadel Platons über den Zustand der Stereometrie wird verständlich, wenn man mit dem Verf. (S. 154) annimmt, daß nur das spezielle Problem der Würfelverdoppelung gemeint war. — Thymaridas (S. 131) ist wohl etwas später anzusetzen. — Kap. VI (S. 165—223, Das Jahrhundert Platons) behandelt die Rolle des Archytas, Theaitetos, Eudoxos, Autolykos und Euklid. Dem Archytas schreibt der Verf. das logisch nicht einwandfreie 8. Buch der Elemente zu. Hervorgehoben seien noch die Rekonstruktion der Leistungen des Theaitetos, die Analyse des 10. Buches der Elemente, die Betrachtungen über die Epinomis (Mathematik und Harmoniklehre) sowie die Stellungnahme zum Eratosthenesbrief über die Würfelverdoppelung im Dialog Platonikos. — Kap. VII (S. 224—291) umfaßt die Alexandrinerzeit, hier besonders ausführlich Archimedes und Apollonios (Epizykeltheorie und Kegelschnitte). — Im letzten Kapitel VIII (S. 292—321, Der Untergang der griechischen Mathematik) tritt nochmals bei Diophant die enge Beziehung

zur babylonischen Mathematik in Erscheinung; von ihm gehen dann die Wege zu den Arabern. Die innere Ursache für den Verfall sieht der Verf. im Fehlen einer leistungsfähigen Algebra und einer kontinuierlichen mündlichen Überlieferung; ohne sie war es ungemein schwer, einem nur schriftlich niedergelegten Gedankengang zu folgen. Jeder, der z. B. an die Kegelschnitte des Apollonios ohne moderne Hilfsmittel (Algebra, analytische Geometrie) herangeht, wird dem Verf. recht geben. — Besonders hervorzuheben ist noch das sorgfältige Zurückgehen auf die Quellen, die genaue Unterscheidung zwischen Tatsachen und Vermutungen sowie die Darlegung der Gründe, die den Verf. zu den mitgeteilten Urteilen veranlaßten. Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich, zahlreiche Bilder und Übersichten beleben die Darstellung. Die großen Mathematiker werden, soweit möglich, auch nach ihrem Lebens- und Charakterbild gezeichnet und, was besonders wichtig ist, die Entwicklung der Mathematik wird hineingestellt in die Gesamtgeschichte und Kultur der Zeit. So hat uns der Verf. ein Werk geschenkt, von dem man nur — um es auch bei uns leichter nutzbar zu machen — wünschen möchte, daß es einmal in einer deutschen Ausgabe vorliegen wird.

Kurt Vogel (München).

Agostini, Amodeo: *L'uso delle lettere nel „Liber abaci“ di Leonardo Fibonacci.* Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 282—287 (1949).

Verf. führt mehrere Beispiele an, in denen Leonardo (1228) von bestimmten ganzen positiven Zahlen zu allgemeinen übergeht, die er durch Buchstaben bezeichnet. Es handelt sich um Fälle von Textgleichungen, die Regel $\sqrt{mn} = \sqrt{m} \sqrt{n}$, die Bezeichnung der Glieder einer geometrischen Reihe, die Behandlung von quadratischen Gleichungen und von Sätzen aus der Bruchrechnung. Dies alles sind beachtliche Anfänge einer literalen Algebra, die zwar noch nicht sehr weit gehen, aber den Vergleich mit den ähnlich gearteten zeitgenössischen Versuchen des Jordanus Nemorarius durchaus bestehen können.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Boyer, C. B.: *James Hume and exponents.* Amer. math. Monthly 57, 7—8 (1950).

Verf. berichtet an Hand der seltenen Ausgabe von Humes *Algèbre de Viète*, d'une methode nouvelle, claire et facile (Paris 1636) die des öftern auftretende Behauptung, in diesem Werk träten (römische) Hochzahlen zur Potenzbezeichnung auf. Es finden sich nur Beizahlen (wie Aiiij für A^3).

J. E. Hofmann.

● **Toeplitz, Otto:** *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Köthe.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LVI.) Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. IX, 181 S. mit 148 Abb., DM 19,60; geb. DM 22,60.

Jeder, der dem *Historia sapientia ipsa* oder auch der Gonsethschen Dialektik zustimmt, wird das Erscheinen dieses Buches als die Ausfüllung einer bisherigen Lücke ansehen. Eine Bearbeitung von einem neuen Gesichtspunkte aus stellt aber einen Verf. fast immer vor unerwartete Schwierigkeiten. Wenn Ref. also einige Bemerkungen macht, so sollen diese den hohen Wert, der diesem Buche zuzuschreiben ist, nicht verkleinern. Die Beschreibung der Auffindung der Quadratwurzeln (S. 3) verkennt s. E. die geistreichen Methoden der Babylonier und die Mittelwerttheorematen der Griechen vollkommen; die unrichtige Tatsache, daß Stevin den Dezimalbruch und das Komma gekannt hat, wird ein Nichtsachverständiger aus S. 15 leicht entnehmen; auch die „Benutzung der Formeln (S. 21)“ von Archimed könnte leicht irreführend werden, da nicht explizit gesagt wird, daß Archimed gar keine Formeln benutzt und zumal auf S. 86 eine diesbezügliche Bemerkung bezüglich der Arbeit Napiers vom Verf. ausdrücklich gemacht wurde. James Gregory wird nicht genannt! Vom didaktischen Standpunkte würde man vielleicht besser die Herleitung von $\sin x/x$ (S. 109) auf die Postulate S. 70, über Flächen, als auf die von S. 71 über Bogen stützen. Was in einem solchen Buche ausgelassen werden muß, ist immer eine heikle Frage; daß aber der Tautochronismus der Zykloide besprochen wird, aber die Huygensehe Herleitung ausgelassen wurde, ist zu bedauern. Ref. wiederholt, daß viele derartige Bemerkungen die Anerkennung der hohen Verdienste dieses Werkes als Ganzes nicht zu verringern vermögen.

E. M. Bruins (Amsterdam).

Bouligand, G.: A une étape décisive de l'algèbre: L'œuvre scientifique et l'œuvre didactique d'Etienne Bézout. Rev. génér. Sci. pur. appl., Bull. Soc. philomatique, Paris 55, 121—123 (1948).

Bézout (1730—1783) — seit 1758 Mitglied der Académie des Sciences, 1763 Examiner der Marinegarden, 1768 der Artillerie, ist Verf. eines beliebten 6-bändigen Cours de mathématique (Paris 1764/69, verändert Paris 1770/72, viele spätere Auflagen, Übersetzungen und Umarbeitungen) für zukünftige Offiziere. In Akademie-Abhandlungen von 1762 und 1765 werden Gleichungen n -ten Grades vermöge

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^k$$
 und ähnlicher Ansätze transformiert und Resolventen vom Grad $n!$

gebildet. 1764 wird das nach Bézout benannte Eliminationsverfahren an n algebraischen Gleichungen mit n Unbekannten unter Vermeidung problemfremder Faktoren entwickelt, die bei Newtons Verwendung größter gemeinsamer Teiler auftreten und das Euler-Cramersche Verfahren mittels symmetrischer Funktionen auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten beschränken. Eine selbständige Zusammenfassung der algebraischen Ergebnisse bietet die Théorie générale des équations algébriques (Paris 1779).

J. E. Hofmann (Tübingen).

Bržek, V. F.: Über die Bolzanosche Funktion. (Zum 100. Todestag des tschechischen Mathematikers Bernhard Bolzano.) Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 2 (30), 15—21 (1949) [Russisch].

Es werden zunächst einige Daten aus dem Leben Bolzanos gegeben. Weiter wird erwähnt, daß im Jahre 1920 in der Staatsbibliothek in Wien ein Manuskript Bolzanos aus dem Jahre 1830 gefunden wurde, das dann im Jahre 1930 erstmalig veröffentlicht wurde, und das u. a. bereits einige Sätze der Funktionentheorie enthält, die Cauchy bzw. Weierstraß zugeschrieben werden. Die Arbeit befaßt sich weiter mit monotonen Funktionen und solchen, die in jedem beliebigen ihrer Unterabschnitte nicht monoton sind. Auf diese Bolzanosche Funktion wird in der vorliegenden Gedenkschrift auf Bolzano näher eingegangen.

Picht (Potsdam).

● **Max Planck in seinen Akademie-Ansprachen.** Erinnerungsschrift der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin: Akademie-Verlag 1948. 204 S.

Ce volume contient les discours faits par le célèbre physicien Max Planck en occasion de sa nomination à l'Académie des Sciences de Berlin et des répliques qu'il a fait suivre aux discours de ses collègues. — Parmi les plus importants nous indiquons le discours inaugural prononcé le 28 juin 1894 et celui du 2 juillet 1914, le jour où Einstein fut associé à l'Académie. — On reconnaît partout que Planck a eu une attitude prudente vis à vis des idées révolutionnaires de la Science jusqu'au moment où il était nécessaire de changer les concepts physiques à cause des faits et de leur interprétation ancienne en désaccord avec l'expérience. — Nous voulons en particulier remarquer que dans le discours du 1894 il n'a su abandonner définitivement l'idée de l'impossibilité, de construire un modèle mécanique de tous les phénomènes physiques et en 1914 il a conçu le principe de relativité d'une manière trop étroite sans en apercevoir peut-être la puissance qu'il contient pour la construction de la physique nouvelle. — Il est probable encore qu'il n'ait pas compris toute l'importance des conséquences qu'on pourrait tirer de son hypothèse du quantum d'action bien qu'on raconte qu'un jour, en se promenant avec son fils, il lui ait dit d'avoir fait une découverte comparable à celles de Newton. — Le volume contient aussi la reproduction de manuscrits de Planck avec la proposition pour l'élection à l'Académie de Rubens (1907) et de M. von Laue (1920) et enfin un article de A. Sommerfeld (1918) sur l'oeuvre scientifique de Planck. — La liste des travaux de Planck termine l'intéressant volume.

G. Lampariello (Messine).

VI. Polnischer Mathematikerkongreß. Jubiläum der 50jährigen Lehrtätigkeit von Professor Wacław Sierpiński. Warszawa, 23. 9. 1949. Warschau: Das Jubiläums-Comitee 1949. 94 S. [Polnisch].

Der Band enthält neben Berichten über die Jubiläumsfeier eine kurze Biographie Sierpińskis, eine Würdigung seines wissenschaftlichen Werkes von E. Marczewski und eine chronologisch geordnetes Verzeichnis seiner Schriften.

Agostini, Amodeo: *Il contributo italiano allo sviluppo dell'aritmetica e dell'algebra*. Archimede, Firenze 2, 41—43 (1950).

Bohr, Harald: *Johannes Hjelmslev in memoriam*. Acta math., København 83, VII—IX (1950).

Rybnikov, K. A.: *Viktor Viktorovic Bobynin (1849-1919)*. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 203—210 (1950) [Russisch].

Bogoljubov, N. N.: *Nikolaj Mitrofanovič Krylov*. (Zum 70. Geburtstag.) Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 230—233 (1950) [Russisch].

Kolmogorov, A. N.: *Lazar Aronovič Ljusternik*. (Zum 50. Geburtstag.) Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 234—235 (1950) [Russisch].

Schlapp, Robert: *Colin Maclaurin. A biographical note*. Edinburgh math. Notes 37, 1—6 (1949).

Moret, Émile Cotton. (5 février 1872 — 14 mars 1950.) Ann. Inst. Fourier, Univ. Grenoble 1, 1—4 (1950).

Järnefelt, G.: *Karl F. Sundman in memoriam*. Acta math., København 83, I—VI (1950).

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

Alexandroff, P. S.: *Pavel Samuilovič Urysohn*. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 1 (35), 196—202 (1950) [Russisch].

Ammann, André: *Rolin Wavre (1896—1949)*. Rev. génér. Sci. pur. appl., Bull. Soc. philomathique, Paris 57, 7—8 (1950).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

Bouligand, Georges: *Vue d'ensemble sur la mathématique*. Rev. génér. Sci. pur. appl., Paris, II. S. 54, 151—155 (1947).

Quine, W. V.: *On universals*. J. symbolic. Logic 12, 74—84 (1947).

Nach einer Gegenüberstellung des „platonischen“ und des „nominalistischen“ Standpunktes zu den Allgemeinbegriffen skizziert Verf. einen Ansatz zur Vermeidung der letzteren im mathematischen Aufbau der Logik. Als Allgemeinbegriffe erscheinen in der symbolischen Logik, wenn man von einem Bereich konkreter Einzeldinge ausgeht, die Klassen bzw. die Satzfunktionen. Sie scheinen unvermeidlich zu werden, sobald die Variablen (die sich zunächst noch als schematische Anweisungen für Einzeldinge auffassen lassen) quantifiziert werden. Verf. schlägt die Einführung einer „beschränkten Quantoroperation“ vor, die sich jeweils auf endlich viele Dinge beziehen soll. In einer solchen Logik, der ein endlicher Vorrat konkreter Dinge zugrunde liegt, sind die oben angeführten Allgemeinbegriffe auf die Grunddinge zurückführbar.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Brouwer, L. E. J.: *Richtlinien der intuitionistischen Mathematik*. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 50, 339 (1947) [Holländisch].

Die hier gegebenen, kurz gefaßten Richtlinien, die von einer Festlegung der intuitionistischen Mathematik als einer sprachenfreien Gedankenkonstruktion ausgehen, weichen, wie der Verf. hervorhebt, in verschiedener Hinsicht von früher aufgestellten Richtlinien ab. Sie betreffen insbesondere die Bildung der Begriffe „Folge“, „Spezies“ und „Menge“ sowie die (in der Definition der letzteren auftretenden) „Zeichen“ und „Ziffernkomplexe“.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Beth, E. W.: *Semantical considerations on intuitionistic mathematics*. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 50, 1146—1251 (1947).

Nachdem Verf. die mathematische, die metamathematische und die semantische Methode gegeneinander abgegrenzt hat, umreißt er die Grundzüge einer Anwen-

dung der Tarskischen semantischen Methode [„Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“, *Studia philos.* 1, 261—405 (1935); dies. Zbl. 13, 289] auf die intuitionistische Mathematik. Den Abschluß bildet eine Formalisierung des Brouwerschen Mengenbildungsgesetzes; dabei wird kurz auch erörtert, wie sich diese Formalisierung zu der nichtformalisierbaren intuitionistischen Mengenauffassung verhält.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Dantzig, D. van: On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. I. II. *Proc. Akad. Wet., Amsterdam* 50, 918—929, 1092—1103 (1947).

Im I. Teil gibt Verf. einen Überblick über die begriffliche Grundlage der intuitionistischen Mathematik und berichtet über die von Gödel angegebene Reduktion einer in der klassischen Prädikatenlogik beweisbaren Aussage auf eine intuitionistische (vgl. dies. Zbl. 7, 193), wobei er den Begriff der „stabilen“ Aussage herausstellt (\mathfrak{A} ist stabil, wenn \mathfrak{A} äquivalent $\bigwedge \bigwedge \mathfrak{A}$; daß nur negative Aussagen stabil seien, ist übrigens ein Irrtum). Das letzte Kap. des II. Teiles setzt sich mit den Unvollkommenheiten der Formalisierung der Mathematik auseinander. — Im Kap. 3 (im II. Teil) werden die Grundbegriffe einer negationsfreien Mathematik entwickelt. Verf. geht aus von den Zahlaxiomen $N0$; $Nx \rightarrow Nx'$; vier Gleichheitsaxiomen und dem primitiven Rekursions- und Induktionsschema sowie von dem (das Peano-Axiom $x' \neq 0$ vertretenden) Axiom $Nx \wedge Ny \rightarrow (x + y = 0 \rightarrow y = 0)$. Ohne Benutzung der $<$ -Relation wird ein beschränkter Existenzquantor $\exists_{\xi}^{\mathfrak{A}} \mathfrak{E}(\xi)$ (für „es gibt unter den Zahlen bis n eine der Eigenschaft \mathfrak{E} “) rekursiv eingeführt. Dann wird definiert:

$$a \leq b \leftrightarrow \exists_{\xi}^b (a = \xi); \quad a < b \leftrightarrow a' \leq b; \quad a \neq b \leftrightarrow a < b \vee b < a.$$

Die reellen Zahlen werden nun mit einem konstanten Funktionssymbol d (für Näherungen mit positiven oder negativen Stellen) so fixiert (wobei J das Zeichen für ganze Zahlen ist): $Rx \leftrightarrow \forall n (Nn \rightarrow J d_n x \wedge |d_n x - 2 d_n x| \leq 1)$. Sodann werden die Relationen $=$, \leq , $<$, \neq und die Funktion Max für Paare reeller Zahlen unter Rückgang auf die d_n definiert, wobei allerdings die beiden letztgenannten Relationen in schwächere Relationen „ $\overset{n}{<}$ “ und „ $\overset{n}{\neq}$ “ (Bedeutung etwa: „bis zur n -ten Stelle der Näherung genommen“) aufgespalten werden. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Destouches-Février, Paulette: Esquisse d'une mathématique intuitioniste positive. *C. r. Acad. Sci., Paris* 225, 1241—1243 (1947).

Destouches-Février, Paulette: Logique de l'intuitionisme sans négation et logique de l'intuitionisme positif. *C. r. Acad. Sci., Paris* 226, 38—39 (1948).

In der ersten Note wird eine Abänderung der negationsfreien Logik von C. Griss [Versl. Akad. Wet., Amsterdam 53, 261—268 (1944); *Proc. Akad. Wet., Amsterdam* 49, 1127—1133 (1946)] vorgeschlagen, in dem statt der Grisschen „unverträglichen Aussagen“ (wie $a = b$ und $a \neq b$) eine Negation verwandt wird, die durch $\neg p = df: p \rightarrow \Phi$ fixiert ist, wo Φ eine falsche Aussage (in der Zahlenlehre z. B. $1 = 2$) ist. In der zweiten Note werden die beiden Logiken kurz verglichen. Die Verf. hält die beiden Kalküle für enger als den Johannsenschen Minimalkalkül, da $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ nicht beweisbar sei; dies ist allerdings ein Irrtum, s. L'Abbé, *J. Symbolic Logic* 13, 164 (1948).

Arnold Schmidt (Göttingen).

Analysis.

Allgemeines:

•Lindelöf, Ernst: Einführung in die höhere Analysis. Zum Selbststudium und für Studierende der ersten Semester. Nach der ersten schwedischen und zweiten finnischen Auflage deutsch herausgegeben von Egon Ullrich. — 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsges. 1950. IX, 526 S. mit 84 Fig.; DM 14,80.

● Smirnov, V. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. 3, Teil 2.* 2. Aufl. Leningrad u. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1949. 672 S., 20 R. 55 Kp. [Russisch].

Kapitelüberschriften: I. Allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. II. Konforme Abbildung und ebene Felder. III. Anwendung der Theorie der Residuen, ganze und gebrochene (meromorphe) Funktionen. IV. Funktionen mehrerer Veränderlichen und Funktionen von Matrizen. V. Lineare Differentialgleichungen. VI. Spezielle Funktionen. Anhang: Transformation von Matrizen auf die kanonische Form. — Die drei ersten Kapitel bringen ungefähr das, was im ersten Band eines Lehrbuches der Funktionentheorie zu stehen pflegt, in klarer und übersichtlicher Darstellung, und zwar ist der Band, wenn auch Teil eines größeren Werkes, für sich lesbar. Nur gelegentlich werden frühere Ergebnisse verwandt; beispielsweise wird der Cauchysche Satz auf einen in einem andern Band bewiesenen Satz über Kurvenintegrale zurückgeführt. Methodisches Haupthilfsmittel, besonders bei der Grundlegung der Theorie, ist der Cauchysche Satz. Kap. IV beschränkt sich auf die Grundbegriffe und -eigenschaften. Es werden absolut konvergente Potenzreihen von zwei Veränderlichen behandelt und Potenzreihen einer Matrix. Im V. Kap. wird zunächst ausführlich die Auflösung einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung im Komplexen durch Potenzreihen, asymptotische Reihen und komplexe Integrale behandelt, als Hauptbeispiel vor allem die hypergeometrische und die Besselsche Gleichung. Anschließend bringt Verf. in sehr eleganter Form die Theorie der Gleichung höherer Ordnung bzw. eines Systems linearer Gleichungen erster Ordnung unter Benutzung der Matrizen-symbolik und der in Kap. IV gewonnenen Ergebnisse. Kap. VI beschäftigt sich zunächst mit den Kugelfunktionen (Ausgangspunkt ist die Potentialgleichung), sodann mit den Zylinderfunktionen und den Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen (Ausgangspunkt ist die Gleichung des harmonischen Oszillators). Es schließt sich ein Überblick über die elliptischen Integrale und deren Umkehrung, die (Weierstraßschen und Jacobischen) elliptischen Funktionen an. Der Anhang behandelt einige Hilfssätze aus der Matrizenrechnung. — Abschließend sei hervor-gehoben, daß es dem Verf. gelungen ist, einen recht erheblichen Teil der komplexen Analysis in zusammenhängender Form darzustellen und die wichtigsten Probleme zum mindesten in den Grundzügen und den einfachen Fällen zu erörtern. *W. Hahn.*

Mengenlehre:

● Sierpiński, Waclaw: *Leçons sur les nombres transfinis.* Nouveau tirage. (Collection des Monographies sur la Théorie des Fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1950. VI, 240 p.

Cuesta, N.: *Ordnung der positiven Nullfolgen.* Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 131—140 (1949) [Spanisch].

Geht man von einer geordneten Menge A vom Typ α zu einer Obermenge A' über, indem man in jeder Lücke, jedem Sprung und jenseits von Anfang und Ende je ein neues Element einfügt, so gilt für den Typ von A' die Beziehung $\alpha' > \alpha$. Fortsetzung ins Transfinite, $\alpha^{(2)} = (\alpha')'$, ... ist möglich. Z. B. ist $1^{(\omega_0)}$ der Typ der rationalen Zahlen. Verf. betrachtet nun das System S der Folgen $((a_n)) = a$ reeller, positiver, nach Null strebender Zahlen a_n mit der teilweisen Ordnung: $((a_n)) < ((b_n))$ wenn und nur wenn $a_n < b_n$ für schließlich alle natürlichen n . Ein Teilsystem L von S heißt eine Linie in S , wenn es als Teil von S linear geordnet ist; maximal, wenn L nicht echter Teil einer Linie. Für den Ordnungstyp μ einer maximalen Linie in S gilt $\mu \geq 1^{(\omega_1)}$; ihre Mächtigkeit ist gleich 2^{\aleph_0} . Man zerlegt S in $C + D$, wobei $((a_n)) \in C$ bzw. D , je nachdem $\sum a_n$ konvergiert oder divergiert. Es gibt maximale Linien, welche C und D durchsetzen. Probleme: 1. Geschieht

die Trennung von C und D auf einer C und D durchsetzenden Linie in Form eines Schnittes, Sprunges oder einer Lücke? 2. Sind alle maximalen Linien in S einander ähnlich? 3. Ist $\mu = 1^{(\omega)}$? 4. Gibt es maximale Linien, die ganz in C oder ganz in D verlaufen? 5. Gibt es Konvergenzeinhüllende, d. h. Linien L in C , für welche die Ungleichung $c < \varepsilon$ für jedes $c \in C$ mit $\varepsilon \in L$ lösbar ist? 6. Gibt es Linien L in D , so daß $\varepsilon < \delta$ für jedes $\delta \in D$ mit einem $\varepsilon \in L$ lösbar? *Aumann.*

Borgers, Alfons: Development of the notion of set and of the axioms for sets. *Synthese* 7, 373—390 (1949).

Ein einführender Bericht über die axiomatischen Mengenlehren von Zermelo, Skolem-Fränkel-v. Neumann und Bernays. Der konstruktive Mengenbegriff sowie das Widerspruchsfreiheitsproblem werden nicht erwähnt. *Lorenzen.*

Schaerf, Henry M.: Sur l'unicité des mesures invariantes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 229, 1053—1055 (1949).

Soit T une tribu de parties d'un ensemble E ; soit $A \sim B$ une relation d'équivalence définie dans T ; on dit que cette relation est régulière si toute relation de la forme $A = \bigcup A_n$ entre éléments de T (où les A_n sont deux à deux disjoints) implique, pour $A \sim B$, une relation analogue $B = \bigcup B_n$ avec $B_n \sim A_n$; une mesure m définie sur T est dite invariante si $A \sim B$ implique $m(A) = m(B)$; enfin, on dit que m possède la propriété d'intersection si, quels que soient les éléments A, B de T , de mesures non nulles pour m , il existe A' et B' dans T , également de mesures non nulles, avec $A' \subset A$, $B' \subset B$ et $A' \sim B'$. L'A. annonce que, pour une relation régulière, l'unicité (à un facteur constant près) d'une mesure invariante équivaut au fait que toute mesure invariante possède la propriété d'intersection. L'A. déduit de là un résultat sur l'unicité des mesures invariantes dans les groupes (non topologiques; mais il y a lieu de se demander, en raison des résultats bien connus d'A. Weil, si cette généralité est plus qu'apparente), ainsi qu'à la théorie ergodique. *R. Godement (Nancy).*

Borel, Émile: Sur l'addition vectorielle d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle. *C. r. Acad. Sci., Paris* 227, 167—168 (1948).

Die Vektoraddition von nicht dichten linearen Nullmengen (vgl. dies. Zbl. 33, 352) wird hier auch auf endlich bzw. abzählbar unendlich viele dichte lineare Nullmengen erweitert. Diese Vektorsumme braucht nicht immer eine Nullmenge zu sein. Ein interessanter Fall von einer Folge E_1, E_2, \dots von Nullmengen wird behandelt, deren Vektorsumme eine Nullmenge ist und für welche die Vektorsumme durch geeignete Adjunktion von nur zwei Punkten an jede Menge E_i so geändert wird, daß sie das ganze Intervall $(0, 1)$ enthält. *D. A. Kappos (Erlangen).*

Borel, Émile: Sur la raréfaction R et l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle. *C. r. Acad. Sci., Paris* 227, 453—455 (1948).

Mit Hilfe der logarithmischen Verdünnung (raréfaction ρ) von linearen Nullmengen wurden vom Verf. in einer anderen Arbeit (dies. Zbl. 33, 352) Bedingungen gegeben, daß die Vektorsumme von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Hier werden nun mit Hilfe einer anderen Verdünnung R der sogenannten relativen Maximumverdünnung Bedingungen gegeben, daß die Vektorsumme von Nullmengen ein ganzes Intervall enthält. Wenn z. B. die Verdünnungen R von k Teilmengen des Intervalles $(0, 1)$ eine Summe ≥ 1 haben, dann enthält ihre Vektorsumme das ganze Intervall $(0, k)$. Beispiele und weitere Bedingungen werden gegeben. *Kappos.*

McMinn, Trevor J.: Restricted measurability. *Bull. Amer. math. Soc.* 54, 1105—1109 (1948).

Verf. betrachtet eine Maßfunktion $\Phi(A)$ definiert für alle Teilmengen einer festen Menge S . M heißt (wie üblich) Φ -meßbar, wenn M jedes $A \subset S$ additiv bezüglich Φ zerlegt. Es bezeichne \mathfrak{F} ein Teilsystem von Teilmengen von S ; M heißt (Φ, \mathfrak{F}) -meßbar, wenn M jedes AF mit $A \subset S$ und $F \in \mathfrak{F}$ additiv bezüglich Φ zerlegt: $\Phi(AF) = \Phi(AFM) + \Phi(AF - AFM)$. Aus dieser (Φ, \mathfrak{F}) -Meßbarkeit folgt

die Φ -Meßbarkeit, wenn \mathfrak{F} folgende Eigenschaften hat: 1. Jede Teilmenge eines F ist ein F ; 2. die Vereinigung von abzählbaren vielen F ist ein F ; 3. zu jedem $A \subset S$ mit endlichem $\Phi(A)$ gibt es eine aufsteigende Folge $((F_n))$ von Mengen aus \mathfrak{F} , welche (Φ, \mathfrak{F}) -meßbar sind und $\Phi(A - A \sum_{n=1}^{\infty} F_n) = 0$ erfüllen. Als Anwendung folgen einige Sätze über die Φ -Meßbarkeit offener Mengen, wenn S eine Metrik besitzt.

Aumann (Würzburg).

Hadwiger, H.: Ein Auswahlssatz für abgeschlossene Punktmengen. Portugaliae Math. 8, 13—15 (1949).

Der bekannte Auswahlssatz von Blaschke über die Existenz konvergenter Teilfolgen innerhalb unendlicher Mengen gleichmäßig beschränkter konvexer Körper wird hier in folgender allgemeiner Form bewiesen: Es sei $\{A\}$ ein unendliches System abgeschlossener Punktmengen, dessen Elemente innerhalb einer festen Punktmenge W liegen. Dann läßt sich aus $\{A\}$ eine Folge A_n herausgreifen, die gegen eine abgeschlossene Teilmenge von W konvergiert. Der außerordentliche elegante Beweis gründet sich auf einen neuen Entfernungsbegriff, den man folgendermaßen definieren kann: Es bedeute allgemein A_h die Außenmenge von A in der Entfernung h . Sind dann A, B zwei abgeschlossene Punktmengen, so wird als Entfernung $d(A, B)$ die untere Grenze derjenigen h definiert, für die A_h bzw. B_h entsprechend B bzw. A enthalten. Diese Entfernung genügt der bekannten Dreiecksbeziehung und verschwindet dann und nur dann, wenn die beiden Mengen übereinstimmen.

Dinghas (Berlin).

Sierpiński, W.: Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points. Elemente Math., Basel 5, 1—4 (1950).

Der Verf. führt — ohne Beweise oder nähere Ausführung — eine große Zahl von gelösten und ungelösten Problemen an, die sich auf Kongruenz und Zerlegung von Mengen beziehen; gerade hier liefert ja die Mengenlehre für den Fernerstehenden (und nicht nur für diesen!) immer wieder sehr überraschende Beispiele. Hornich.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Ionesco Tulcea, C. T.: Mesures dans les espaces produits. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 208—211 (1950).

Soit K un ensemble d'indices, et pour chaque $s \in K$, soit X_s un espace, T_s une tribu de parties de X_s . Soit E l'espace produit $\prod_{s \in K} X_s$, et pour toute partie finie $I \subset K$, soit $E_I = \prod_{s \in I} X_s$, et T_I la tribu engendrée dans E_I par les ensembles

$\prod_{s \in I} A_s$, où $A_s \in T_s$. Soit T l'ensemble des parties „cylindriques“ $pr_I^{-1}(A)$, où $A \in T_I$, et I parcourt l'ensemble des parties finies de K . Supposons donnée sur T une fonction d'ensemble additive P qui, sur chacune des tribus $pr_I^{-1}(T_I)$ est dénombrablement additive. On sait que si on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire, la fonction P n'est pas toujours dénombrablement additive dans T (E. Sparre Andersen and B. Jessen, ce Zbl. 31, 294). L'A. donne une condition suffisante pour que P soit dénombrablement additive, en utilisant la notion de mesure conditionnée régulière de Doob.

J. Dieudonné (Nancy).

Frumkin, P. B.: Zum Theorem von D. F. Egorov über meßbare Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 973—975 (1948) [Russisch].

Man verdankt G. Tolstoff (vgl. dies. Zbl. 21, 15) die Bemerkung, daß das „kontinuierliche Analogon“ zum Satz von Egoroff über die gleichmäßige Konvergenz einer konvergenten Folge meßbarer Funktionen nur für B -meßbare Funktionen gilt, aber nicht für L -meßbare. Verf. zeigt nun Satz 1: $f(t, s)$ sei definiert in $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ und für jedes feste t eine fast überall endliche und meßbare Funktion von s sowie $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t, s) = f(t_0, s)$ für fast alle s . Dann gibt es zu vorgegebenem

$\delta_1 > 0$ eine Menge E_{δ_1} mit $|E_{\delta_1}| > 1 - \delta_1$, so daß für ein $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gewählt werden kann, daß $|f(t, s) - f(t_0, s)| < \varepsilon$ für festes t aus $|t - t_0| < \delta$ und alle $s \in E_{\delta_1}$, eventuell nach Ausschluß einer Nullmenge, welche von t abhängt. — Zum Beweis bedient sich Verf. der Theorie der linearen halbgeordneten Räume, wie sie Kantorovič (dies. Zbl. 16, 405) entwickelt hat, und zeigt zunächst den folgenden Satz 2: Die Aussage des Satzes 1 ist gültig, wenn $f(t, s) \in L^p$ ($p \geq 1$) für festes t , $f(t_n, s) \rightarrow f(t_0, s)$ für $t_n \rightarrow t_0$ und für fast alle s und $\sup_t f(t, s) \in L^p$ vorausgesetzt wird. Daraus folgt leicht Satz 1. Schmetterer (Wien).

Kampé de Fériet, J.: Sur un problème d'algèbre abstraite posé par la définition de la moyenne dans la théorie de la turbulence. Ann. Soc. sci. Bruxelles, Sér. I. 63, 165—180 (1949).

Ausgehend von dem Problem der Turbulenztheorie, einer Funktion einen Mittelwert zuzuordnen, stellt Verf. die folgende Frage: Auf einer Menge X sei der Ring R der reellen Funktionen $f(x)$ mit endlich vielen Werten gegeben. Es sind alle Abbildungen von R in sich zu finden, die den Bedingungen

$T(f + g) = Tf + Tg$, $T(\lambda 1) = \lambda 1$, $T(f Tg) = Tf Tg$; $Tf \geq 0$, wenn $f \geq 0$, genügen. Zu jedem f gehört eine Partition $\pi(f)$ von X in elementfremde Mengen A_1, \dots, A_q , so daß $f = \lambda_{A_1} c_{A_1} + \dots + \lambda_{A_q} c_{A_q}$ ist, c_{A_i} die charakteristische Funktion von A_i . Die Partitionen von X bilden einen Verband. Ist θ eine beliebige, auch unendliche Partition von X und ist $\mu(A)$ eine für alle $A \subset X$ erklärte Mengenfunktion mit $\mu(0) = 0$, $\mu(X) = 1$, $0 \leq \mu(A) \leq 1$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, so erhält man eine Abbildung T durch

$$Tf = [\lambda_{A_1} \mu(A_1) + \dots + \lambda_{A_k} \mu(A_k)] \frac{1}{\mu(y_1)} c_{y_1} + [\lambda_{A_{k+1}} \mu(A_{k+1}) + \dots + \lambda_{A_{k+j}} \mu(A_{k+j})] \frac{1}{\mu(y_2)} c_{y_2} + \dots$$

Dabei sind die $y_1 = A_1 \cup \dots \cup A_k$, $y_2 = A_{k+1} \cup \dots \cup A_{k+j}$, ... die Mengen der Partition $\pi(f) \cup \theta$. Alle T entstehen auf diese Weise. G. Köthe (Mainz).

Lévy, Paul: Nouvelles généralisations de l'intégrale de Stieltjes. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 644—646 (1949).

Verf. deutet verschiedene Möglichkeiten zur Verallgemeinerung des Stieltjes-Integrale an, indem er die Wahl der Einteilungsstellen für die Näherungssummen dem Zufall anvertraut. Dadurch könnten die Näherungssummen oder sonst doch ihr Erwartungswert auch bei nicht Stieltjes-integrierbaren Funktionen einen Grenzwert finden. In zwei Dimensionen ist die Zahl der Möglichkeiten noch größer. Anwendungen solcher Stieltjes-Wahrscheinlichkeits-Integrale auf die Brownsche Bewegung erscheinen aussichtsreich. Bödewadt (Brunoy).

Stoljarov, N. A.: Über eine Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integrals. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 15—16 (1950) [Russisch].

Für ein $\varphi(x)$ sei $\varphi_1(x_{i-1}, x_i) = \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ und analog $\varphi_k(x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k-1})$ der k -te Differenzenquotient. $f(x)$ und $\varphi(x)$ seien auf dem Intervall (a, b) definiert und dort endlich. e bezeichne irgendeine Einteilung des Intervalles (a, b) , d. h. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, und man bilde $S = \sum_{i=1}^n f(x_i) (\varphi_1(x_i, x_{i+1}) - \varphi_1(x_{i-1}, x_i))$. Falls diese Summe für alle e , deren Durchmesser gegen 0 strebt, einem Grenzwert zustrebt, soll er $\int_a^b f(x) \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$ (verallgemeinertes Stieltjessches Integral) heißen. Diese Definition verdankt man Kantorovič (dies. Zbl. 11, 60). Verf. betrachtet die Summen $S = \sum_{i=1}^{n-k+1} f(x_i) (\varphi_{k-1}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}) - \varphi_{k-1}(x_{i-1}, \dots, x_{i+k-2}))$ ($k < n$).

Der gegebenenfalls vorhandene Grenzwert (s. o.) werde mit $\int_a^b f(x) \frac{d^k \varphi}{dx^{k-1}}$ (Integral von Stieltjes-Kantorovič) bezeichnet. Es wird ohne Beweise eine Reihe von Eigenschaften dieses Integrales angegeben, z. B.: $P(x)$ sei ein Polynom höchstens $(k-1)$ -ten Grades. Dann gilt $\int_a^b f(x) \frac{d^k(\varphi + P)}{dx^{k-1}} = \int_a^b f(x) \frac{d^k \varphi}{dx^{k-1}}$. Das Integral ist ein additiver Operator. Es existiert, wenn $f(x)$ R -integrierbar ist und $\varphi(x)$ eine stetige k -te Ableitung in (a, b) besitzt oder wenn $f(x)$ stetig in (a, b) ist, $\varphi(x)$ dort eine konvexe $(k-2)$ -te Ableitung hat und $\varphi^{(k-1)}(a)$ und $\varphi^{(k-1)}(b)$ existieren und endlich sind. Besitzt f eine stetige Ableitung und erfüllt $\varphi(x)$ dieselben Voraussetzungen wie eben, doch ist „konvex“ durch „von beschränkter Variation“ zu ersetzen, dann gilt $\int_a^b f(x) \frac{d^k \varphi}{dx^{k-1}} = \frac{2}{(k-1)!} \left\{ |f(x) \varphi^{(k-1)}(x)|_a^b - \int_a^b f'(x) d\varphi^{(k-2)}(x) \right\}$.

Schmetterer (Wien).

Lauwerier, H. A.: Ein elementarer Beweis des Satzes von Arzela-Osgood-Lebesgue. *Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr.* **26**, 177—179 (1948) [Holländisch].

Für den Satz, daß in einem offenen (auch unendlichen) Intervall I die Integrale einer konvergenten gleichmäßig beschränkten Folge von Funktionen f_n mit $f_n \rightarrow f$, $|f_n| < \varphi$ gegen das Integral der Grenzfunktion f konvergieren, wenn f_n, f, φ in jedem abgeschlossenen Teilintervall von I eigentlich Riemann-integrierbar sind und die Majorante φ über I integrierbar ist, findet sich hier ein kurzer Beweis. Er beruht auf der Einteilung von I in die Menge A_n der Punkte, in deren Umgebung $|f - f_n| > \varepsilon$, und die Menge B_n der Punkte von $I - A_n$, in denen $|f - f_n| \leq \varepsilon$. Die Restmenge $I - A_n - B_n$ ist Nullmenge. Das Jordan-Maß von A_n muß (bei festem ε) mit wachsendem n verschwinden, so daß das Integral von $f - f_n$ beliebig klein wird.

Bödewadt (Brunoy).

Mikeladze, Š. E.: Neue Quadraturformeln und ihre Anwendungen zur Integration von Differentialgleichungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **61**, 613—615 (1948) [Russisch].

Es sei $P_m(x) = x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m$. Durch m -fache partielle Integration folgt aus $R_m = (-1)^m (m!)^{-1} \int_a^b P_m(x) f^{(m)}(x) dx$, daß

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{v=1}^m \frac{(-1)^{v-1}}{m!} [P_m^{(m-v)}(x) f^{(v-1)}(x)]_a^b + R_m.$$

Für $P_m(x)$ geeignete Polynome wählend gewinnt Verf. bekannte Quadraturformeln, in denen $R_m(P)$ das Fehlerglied bedeutet (u. a. die Kowalewskische Form des Restglieds bei der Simpsonschen Regel). Mit Hilfe dieses Verfahrens wird noch das Grenzwertproblem $y^{(IV)}(x) = \varphi(x)$, $y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$ behandelt.

Gál (Paris).

Verblunsky, S.: On Green's formula. *J. London math. Soc.* **24**, 146—148 (1949).

Neuer Beweis des Gaußschen Satzes in der Ebene $\iint_I \frac{\partial M}{\partial x} dx dy = \int J M dy$.

J eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve, M stetig auf $I + J$, $\partial M / \partial x$ summabel auf I . Außerdem soll für alle achsenparallelen Rechtecke in I die Formel gelten. Es wird die von Estermann [*Math. Z.* **37**, 556—560 (1933); **38**, 641 (1934); dies. Zbl. **7**, 213, **9**, 24] zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes benutzte Methode übertragen. Eine genauere Auseinandersetzung mit der einschlägigen Literatur, insbesondere der Arbeit von Lorentz (dies. Zbl. **29**, 20) wäre erwünscht gewesen.

Tautz (Freiburg i. Br.).

Kužmin, R. O.: Über eine Formel von Čebyšev für mehrfache Integrale. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **61**, 437—439 (1948) [Russisch].

Tschebyschev hat [J. Math. pur. appl. 8, 234—238 (1843)] ein Theorem über mehrfache Integrale aufgestellt: Für irgendein $f(t)$ gilt

$$(1) \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) f(x_1^{m_1} + \cdots + x_n^{m_n}) dx_1 \cdots dx_n = \int_0^\infty \Phi(u) f(u) du$$

mit $\Phi(u^2) = \frac{\psi(u^2) - \psi(-u^2)}{2\pi u^2 i}$, und

$$(2) \psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} d\alpha \int_0^\infty \varphi_1(x_1) e^{-\alpha x_1^{m_1}/u^2} dx_1 \cdots \int_0^\infty \varphi_n(x_n) e^{-\alpha x_n^{m_n}/u^2} dx_n,$$

falls $\psi(u)$ gewissen Voraussetzungen genügt. Tschebyschev hat das Theorem an zwei Beispielen erläutert, aber nicht bewiesen. Verf. gibt nun einen Beweis und fordert hierbei R -Integrierbarkeit der φ_i und absolute Konvergenz von (1) und (2) mit u statt u^2 , etwas schwächere und genauere Bedingungen als jene, unter denen Tschebyschev (1) angegeben hat. Für $\Phi(u)$ erhält Verf. die Darstellung $= 1/u \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi(-u + \varepsilon i) - \psi(-u - \varepsilon i)]$.
Schmetterer (Wien).

Ljusternik, L. A. und V. A. Ditkin: Konstruktion von Näherungsformeln zur Berechnung mehrfacher Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 441—444 (1948) [Russisch].

Q sei ein k -dimensionales Gebiet des R_n , $k \leq n$, $f(A)$ eine auf Q definierte Funktion. Für festes $\varphi(A)$, gegeben auf Q , wird das Funktional

$$(1) I(f) = \int_Q \cdots \int f(A) \varphi(A) dv$$

betrachtet. Es sollen Näherungsformeln zur Berechnung von $(1) \sum_{i=1}^m c_i f(A_i)$ gefunden werden (c_i konstant, $A_i \subset Q$), welche bei gegebenem positiven, ganzen s für alle Polynome des Grades $\leq s$ richtig sind. Hierzu betrachten Verf. die Differentialoperationen $D_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$. (x, D) sei der Operator $x_1 D_1 + \cdots + x_n D_n$. Dann ist $[\int_Q \cdots \int e^{(x, D)} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) dv] f(y_1, \dots, y_n) = \int_Q \cdots \int f(y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n) dv$. x_{ki} seien die Koordinaten von A_i ($k = 1, \dots, n$). Der Operator $(2) U = \int_Q \cdots \int e^{(x, D)} \varphi(x_1, \dots, x_n) dv - \sum_{i=1}^m c_i e^{(A_i, D)}$, angewendet auf Polynome vom Grade $\leq s$, muß 0 ergeben. Entwickelt man (2) formal nach Potenzen von D_1, \dots, D_n , dann ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten $a_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left[\int_Q \cdots \int x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \varphi(x_1, \dots, x_n) dv - \sum_{i=1}^m c_i x_{1i}^{k_1} \cdots x_{ni}^{k_n} \right]$.

Diese müssen für $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leq s$ verschwinden. Für $s = 3$ ergibt sich z. B. $\pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy \approx \frac{1}{4} [f(1, 0) + f(0, 1) + f(-1, 0) + f(0, -1)]$. — Verf. geben an, daß sie Formeln auch für die Kreisfläche, Vollkugel und regelmäßige Vielecke berechnet haben. S. 442, 7. Z. v. u. lies (5) statt (4).

Schmetterer (Wien).

Hsu, Leetch C.: Approximations to a class of double integrals of functions of large numbers. Amer. J. Math. 70, 698—708 (1948).

In Verallgemeinerung einer — viele Anwendungen besitzenden — Laplaceschen Formel für einfache Integrale untersucht Verf. das asymptotische Verhalten eines zweifachen Integrals I_n von $\varphi(x, y) [f(x, y)]^n = \varphi(x, y) \exp(n h(x))$ über einem abgeschlossenen ebenen Bereich S . Hierbei seien $\varphi, h, f, f_x, \dots, f_{yy}$ stetig sowie die angegebene Funktion absolut integrierbar in S , und f bzw. h nehme ihr absolutes Maximum in einem einzigen Rand- (I.) bzw. inneren (II.) Punkt P von S so an, daß hier bei I. nach der Bogenlänge der Randkurve genommen $f_s = 0$, $f_{ss} < 0$,

$d = f_x^2 + f_y^2 \neq 0$, während bei II. $h_x = h_y = 0$ und $\Delta = h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 > 0$ sei. Verf. zeigt nun, daß im I. Fall

$$I_n \approx (2\pi)^{1/2} \varphi[f]^n + 3/2 \{n^3 [K d^{3/2} - (f_x^2 f_{xy} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx})]\}^{1/2},$$

während im zweiten Fall

$$I_n \approx 2\pi\varphi[f]^n/(n\Delta^{1/2})$$

im asymptotischen Sinne wird, mit dem Werte K der Krümmung der Randkurve bzw. den Funktionswerten in P . Wird (III.) bei II. mit Hilfe einer analytischen Kurve durch P der Bereich S in zwei Teilbereiche zerlegt, so ergibt sich für die entsprechenden Teilintegrale genau die Hälfte des für das ganze S gewonnenen asymptotischen Wertes. *Szentmártony* (Budapest).

Kok, F. de: Über die Gültigkeit einer asymptotischen Formel. Simon Stevin, wis. natuurrk. Tijdschr. **26**, 214—217 (1948/49) [Holländisch].

P. Hartman hat [Amer. J. Math. **62**, 115—121 (1940); dies. Zbl. **22**, 231] die Formel

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu \int_0^1 f(x) \exp(i t x^\lambda) dx = \exp(i \pi/2 \lambda) \Gamma(1 + \mu) f(+0)$$

mit $\lambda > 1 = \lambda \cdot \mu$ unter der Voraussetzung bewiesen, daß $f(x)$ über $(0, 1)$ von beschränkter Variation ist. Verf. zeigt, daß auch folgende schwächere Voraussetzung ausreicht: $f(x)$ ist über $(0, 1)$ Riemann-integrierbar, und es gilt für $y \rightarrow +0$

$$\int_y^1 |f((x^2 + y^2)^\mu) - f(x)| dx = o(y).$$

Bödedadt (Brunoy).

Lozinskij, S. M.: Über die Indikatrix von Banach. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 765—767 (1948) [Russisch].

V sei die Klasse der Funktionen, welche in $(0, 1)$ von beschränkter Schwankung sind, U_1 die Klasse der Funktionen, welche in $(0, 1)$ nur Sprungstellen 1. Art als Unstetigkeiten haben. x sei beliebig reell. Für $X(t) \in U_1$ heiße t nicht Wurzel der Gleichung $X(t) = x$, wenn keiner der folgenden 3 Fälle realisiert ist: 1. $x = X(t)$, 2. $x \in [\min\{X(t-0), X(t)\}, \max\{X(t-0), X(t)\}]$, $x \neq X(t)$, 3. $x \in [\min\{X(t), X(t+0)\}, \max\{X(t), X(t+0)\}]$, $x \neq X(t)$. t heiße einfache Wurzel, wenn genau einer und zweifache, wenn genau 2 Fälle zutreffen, und offenbar sind damit alle Möglichkeiten erschöpft. Mit $N(x, X)$ werde die Anzahl der Wurzeln t in ihrer Vielfachheit bezeichnet ($-\infty < x < \infty$). Für stetiges X wurde dieser Begriff von Banach [Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fundam. Math., Warszawa **7**, 225—236 (1925)] eingeführt und untersucht; er wird vom Verf. als Banachsche Indikatrix bezeichnet. Verf. gibt im Falle $X \in U_1$ eine weitere äquivalente Definition von $N(x, X)$, welche aber hier nicht wiedergegeben werden kann. — $T(X)$ sei die totale Variation von X in $(0, 1)$. Dann lautet Satz 1:

Für irgendein $X \in U_1$ ist N meßbar und $\int_{-\infty}^{+\infty} N(x, X) dx = T(X)$. N ist genau dann summierbar in $(-\infty, \infty)$, wenn $X \in V$. — Nach der Terminologie von Adams und Clarkson (dies. Zbl. **9**, 306) heißt $X_n(t) \xrightarrow{V} X_0$ konvergent der Variation nach, wenn $X_n \in V$ und nebst $X_n \rightarrow X_0$ auch $T(X_n) \rightarrow T(X_0)$ gilt. Satz 2: Aus $X_n \xrightarrow{V} X_0$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |N(x, X_n) - N(x, X_0)| dx = 0$. Wie Rado (dies. Zbl. **15**, 418) gezeigt hat, kann man aus $X_n \xrightarrow{V} X_0$ und $X_n \in C$ sogar auf die gleichmäßige Totalstetigkeit von $\int_E |N(x, X_n)| dx$ schließen. Schließlich wird noch ein weiteres Theorem gegeben, welches Satz 1 als Spezialfall enthält. Keine Beweise. *Schmetterer*.

Morduchow, Morris: On surface-fitting in three variables. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 20, 390—392 (1949).

Der mathematische Inhalt beschränkt sich auf die Erkenntnis, daß eine Funktion $f(x, y)$ die Gestalt $g(x)h(y)$ haben muß, falls feststeht, daß sie für jedes feste y von der Form $k g(x)$ mit demselben $g(x)$ ist, oder daß $f(x, y)$ eine rationale Funktion ist, wenn $f(a, y)$ und $f(x, b)$ für alle a, b Polynome sind. Daß man naheliegende Transformationen heranziehen oder Konstanten abzählen kann, ist auch nicht neu.

Bödewadt (Brunoy).

Allgemeine Reihenlehre:

Hsu, L. C.: Note on an asymptotic expansion of the n th difference of zero. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 19, 273—277 (1948).

Le nombre de Stirling $S_{n,s}$ de deuxième espèce étant lié à la n^e différence de zéro par l'équation

$$n! S_{n,s} = \Delta^n 0^s = \sum_{x=0}^n (-1)^{n-x} \binom{n}{x} x^s$$

l'A. donne un développement asymptotique de $S_{n,n+k}$ de la forme

$$S_{n,n+k} = \frac{n^{2k}}{2^k \cdot k!} \left[1 + \frac{f_1(k)}{n} + \cdots + \frac{f_t(k)}{n^t} + o(n^{-t-1}) \right] \quad (t < k)$$

les f_t étant des polynômes en k . En combinant la formule précédente avec le développement asymptotique bien connu de $n!$, il obtient un développement asymptotique de $\Delta^n 0^{n+k}$.
Ville (Paris).

Lotan, Moshe: A problem in difference sets. Amer. math. Monthly 56, 535—541 (1949).

Es sein a_1, a_2, \dots, a_n beliebig gegebene reellè Zahlen. Die aus diesen n Zahlen gebildete unendliche Folge $a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots$ nennt Verf. einen Zyklus, in Zeichen $Q_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Die absoluten Beträge der Differenzen aufeinander folgender Zahlen ergeben wieder einen Zyklus:

$$Q_n^{(1)} = (|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_n - a_1|);$$

aus diesem gewinnt man entsprechend $Q_n^{(1)} = (|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots)$ allgemein nach k Schritten $Q_n^{(k)}$. Ein Q_n heißt „verschwindend“, wenn für ein gewisses $k \geq 1$ das zugehörige $Q_n^{(k)}$ aus lauter Nullen besteht. So ist beispielsweise jedes Q_2 verschwindend, wie sofort zu sehen. Setzt man $Q_n^{(1)} = (a'_1, \dots, a'_n)$, so folgt leicht $\sum_{i=1}^n a'_i = 0$ für passend gewählte Vorzeichen. Nicht verschwindend

ist z. B. $Q_n^* = (a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1})$, wenn $q > 0$ und $q^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} q^i$ ist. Ist n ungerade, und enthält Q_n mindestens zwei verschiedene Elemente, so verschwindet Q_n niemals. Hauptresultat ist: Mit Ausnahme von $Q_4^* = (1, q, q^2, q^3)$ mit $q^3 - q^2 - q - 1 = 0$ (abgesehen von trivialen Transformationen dieses Zyklus) verschwinden sämtliche Q_4 .
Ostmann (Berlin).

Beckenbach, E. F.: A class of mean value functions. Amer. math. Monthly 57, 1—6 (1950).

Die Bemerkung, daß bei einem Zahlen- n -tupel $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ die Relativstreuung $S(x) = \sum_{j=1}^n [(a_j - x)/x]^2$ ihr Minimum für das gewöhnliche antiharmonische Mittel $x = \left[\sum_{j=1}^n a_j^2 \right] / \left[\sum_{j=1}^n a_j \right] = N_2(a)$ annimmt, gibt dem Verf. die Gelegenheit, eine zusammenhängende Theorie der allgemeinen antiharmonischen Mittel $N_t(a) = N_t(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left[\sum_{j=1}^n a_j^t \right] / \left[\sum_{j=1}^n a_j^{t-1} \right]$, die nicht der meist betrachteten Klasse der Mittelwerte, den quasarithmetischen Mitteln $f^{-1} \left(\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \right)$ ange-

hören (außer für $t = 0$ und $t = 1$, wo sie mit dem harmonischen bzw. mit dem arithmetischen Mittel zusammenfallen) zu entwickeln, ähnlich der allgemeinen Theorie der Potenzmittel $M_t(a) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^t\right)^{1/t}$, wie sie z. B. in Hardy-Littlewood-Pólya:

Inequalities, Cambridge, University Press, 1934 (dies. Zbl. 10, 107) Ch. II, Ch. III zu finden ist; naturgemäß sind die Betrachtungen hier bei den antiharmonischen Mitteln wesentlich schwieriger. — Es werden folgende wichtige Sätze bewiesen. Man setze $N_t(a) = M_t(a)^t / M_{t-1}(a)^{t-1}$ für jedes t ; dann gilt:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} N_t(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N_t(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \dots, a_n)$$

$N_{-t}(a_1, \dots, a_n) = 1/[N_{t+1}(1/a_1, \dots, 1/a_n)]$, $N_t(ka_1, \dots, ka_n) = k N_t(a_1, \dots, a_n)$
 $N_t(a) \leq M_t(a)$ für $t \leq 1$ [$N_t(a) \leq M_{t-1}(a) \leq M_t(a)$ für $t \leq 0$] und $N_t(a) \geq M_t(a)$ für $t \geq 1$. — $N_t(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n)$ wächst mit t , und es wächst mit jedem a_j , falls $0 \leq t \leq 1$, mit den $a_j < N_t(a)$, falls $t < 0$, und mit den $a_j > N_t(a)$, falls $t > 1$. Das Analogon der Minkowskischen Ungleichung für $M_t(a)$, hier

$$N_t(a_1, \dots, a_n) + N_t(b_1, \dots, b_n) \leq N_t(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

bzw. $N_t(a) + N_t(b) \geq N_t(a + b)$

gilt nur für $0 \leq t \leq 1$ bzw. $1 \leq t \leq 2$; die schwächeren Ungleichungen

$$N_t(a_1, \dots, a_n) + c \leq N_t(a_1 + c, \dots, a_n + c)$$

bzw. $N_t(a_1, \dots, a_n) + c \geq N_t(a_1 + c, \dots, a_n + c)$

gelten aber für alle $t \leq 1$ bzw. $t \geq 1$. — Überall wird auch der Gleichheitsfall untersucht. — Die Resultate werden meist durch Derivation hergeleitet. — Es werden Verallgemeinerungen für Gewichtsmittel und Integralmittel derselben Art angedeutet.

Aczél (Miskolc).

Vythoulkas, D.: Generalization of the Schwarz inequality. Bull. Soc. math. Grèce 14, 119—126 und griechische Zusammenfassg. 126—127 (1949).

Verf. gibt einen einfachen Beweis der interessanten Tatsache (die er in seinem Satze unnötig spezialisiert), daß die folgenderweise definierten k Zahlenfolgen $x_{\kappa, n}$ ($\kappa = 1, \dots, k$; $n = 1, 2, \dots$): $x_{k,1}$ fest vorgegeben und

$$x_{1, n+1} = \sqrt{x_{1,n} x_{2,n} \dots x_{k-1, n+1}} = \sqrt{x_{k-1, n} x_{k, n}}, \quad x_{k, n+1} = \sqrt{x_{k, n} x_{1, n}}$$

konvergieren und den gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2, n} = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k-1, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k, n} = \sqrt[k]{x_{1,1} x_{2,1} \dots x_{k,1}}$$

haben ($x_{1, n} x_{2, n} \dots x_{k, n} = x_{1,1} x_{2,1} \dots x_{k,1}$ für jedes n). — Bemerkung des Ref.: Ähnliches gilt auch für weit allgemeinere Mittelwerte. — Der Spezialfall $k = 3$,

$x_{1,1} = a$, $x_{2,1} = a$, $x_{3,1} = 2a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3, n} = \sqrt[3]{2a^3}$ gibt eine

Näherungskonstruktion für das Delische Problem. — Aus diesen Betrachtungen und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\int_a^b [X_1(t) X_2(t) \dots X_k(t)]^{1/k} dt \leq \left[\int_a^b X_1(t) dt \int_a^b X_2(t) dt \dots \int_a^b X_k(t) dt \right]^{1/k},$$

d. h. die Höldersche Integralungleichung, allerdings mit gewisser Beschränkung der Allgemeinheit betreffend die Natur der gestatteten Funktionen $X(t)$. — Eine Anzahl von Übersetzungs- und Druckfehlern stört das Lesen des Artikels.

Aczél.

Aczél, J.: On some sequences defined by recurrence. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 136—139 (1949).

Let the sequence a_n be defined by the recurrence formula

$$a_n = m(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_{n-1})$$

where the function $m(x_1, x_2, \dots, x_k)$ is a) reflexive, i. e. $m(x, x, \dots, x) = x$, b) strictly increasing in each of its variables, c) continuous; then a_n converges to a value a . This theorem applied to the case when

$$(*) \quad m(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \quad (p_i > 0, i = 1, \dots, k)$$

yields a simple proof of the theorem of Eneström and Kakeya according to which a polynomial $c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \dots + c_0$ where $c_k > c_{k-1} > \dots > c_0$ has only roots in absolute value less than 1. Reciprocally in the case (*) the convergence of a_n can be deduced from the theorem of Eneström and Kakeya and the value

$$a = \frac{p_1 a_1 + (p_1 + p_2) a_2 + \dots + (p_1 + p_2 + \dots + p_k) a_k}{p_1 + (p_1 + p_2) + \dots + (p_1 + p_2 + \dots + p_k)}$$

can be established.

Horváth (Paris).

Wuyts, P.: Über das Aufspalten von Termen in einer konvergenten Reihe. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. **26**, 180—188 (1948/49) [Holländisch].

Satz: Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und setzt man

$$a_n = b_{f(n)+1} + b_{f(n)+2} + \dots + b_{f(n+1)},$$

wo $0 = f(0) < f(1) < f(2) < \dots$ ganze Zahlen sind, so ist die „aufgespaltene“ Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ gleichfalls konvergent (und zwar zum gleichen Werte), wenn die Folge $c_n = \max_k |b_{f(n)+1} + \dots + b_k|$ [$f(n) < k \leq f(n+1)$] eine Nullfolge ist.

Diese Bedingung ist zugleich notwendig. — Dieser Satz wird auf den Fall spezialisiert, daß die zum gleichen a_n gehörigen Glieder b_m geometrische Folgen bilden. Ferner werden entsprechende Sätze über gleichmäßige Konvergenz und über die Unterteilung von Integralen aufgestellt.

Bödeuadt (Brunoy).

Makar, R. H.: A note on power series in matrices. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 235—237 (1949).

Anknüpfend an P. Dienes [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **3**, 253—268 (1932); dies. Zbl. **6**, 59] wird für selbst-assoziative ($A^2 A = A A^2$) Matrizen A gezeigt: Wenn relativ prime natürliche Zahlen r und s existieren derart, daß A^r und A^s einem beschränkten assoziativen Feld angehören, und wenn für den Konvergenzradius ϱ von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ erfüllt ist $|A^r| < \varrho^r$ oder $|A^s| < \varrho^s$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ absolut konvergent.

R. Schmidt (München).

Mears, Florence M.: Transformations of double sequences. Amer. J. Math. **70**, 804—832 (1948).

Von H. J. Hamilton [Bull. Amer. math. Soc. **42**, 275—283 (1936); Duke math. J. **2**, 29—60 (1936); dies. Zbl. **14**, **15**, **13**, 303] wurden Doppelfolgen s_{kl} und ihre linearen Transformationen $t_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnkl} s_{kl}$ behandelt. Für 16 Typen von

Doppelfolgen wurden sowohl notwendige wie auch hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß die Transformation (a_{mnkl}) jede Doppelfolge eines bestimmten dieser Typen in einen bestimmten (gleichen oder anderen) dieser Typen überführt. — Verf. nimmt den Begriff der absoluten Konvergenz von Doppelfolgen auf, verbindet ihn mit einigen Begriffen von H. J. Hamilton, fügt damit den Hamiltonschen Typen 4 weitere hinzu, und gewinnt 26 Bedingungen, die in 97 Sätzen als notwendige oder hinreichende Bedingungen auftreten dafür, daß die Transformation jede Doppelfolge eines bestimmten dieser neuen 4 Typen in einen bestimmten der $16 + 4 = 20$ Typen überführt.

R. Schmidt (München).

Basu, S. K.: On the total regularity of some integral and sequence transformations. J. London math. Soc. **23**, 300—309 (1949).

$\|p_{nk}\|$ sei eine unendliche Dreiecksmatrix und $\sigma_n = \sum_{k=0}^n p_{nk} s_k$. Wenn für jede konvergente Folge $\{s_k\}$ aus $s_k \rightarrow l$ ($-\infty < l < \infty$) $\sigma_n \rightarrow l$ folgt, heißt $\|p_{nk}\|$ regulär. Die Toeplitzschen Bedingungen für Regularität sind klassisch geworden. Eine reguläre Transformation heißt total regulär, wenn die Aussage der Regularität auch noch für $l = \pm \infty$ richtig ist. Terminologie und die ersten diesbezüglichen Untersuchungen stammen wohl von Hurwitz [Proc. London math. Soc., II. S. 26, 231—248 (1927)], insbesondere der Satz, daß eine reguläre Transformation genau dann total regulär ist, wenn $p_{nk} \geq 0$ für alle n, k mit $A \leq k \leq n$, $A \geq 0$. Sei $\{s(t)\}$ die Menge aller beschränkten* und in jedem endlichen Intervall $(0, a)$ meßbaren Funktionen, $K(x, t)$ gehöre für jedes $x > 0$ der Klasse $L(0, a)$ für jedes $a > 0$ an.

Sei (1) $\sigma(x) = \int_0^x K(x, t) s(t) dt$. Die Definition der Regularität und Totalregularität von (1) bei Betrachtung von $x \rightarrow +\infty$ übertragen sich sofort. Die Analoga zu den Toeplitzschen Bedingungen gaben Agnew (dies. Zbl. 22, 146) und Knopp (dies. Zbl. 24, 319). Verf. zeigt: Die reguläre Integraltransformation (1) ist genau dann total regulär, wenn es ein $T \geq 0$ gibt, so daß für jedes $x > T$ $K(x, t) \geq 0$ für fast alle t aus (T, x) . „Hinreichend“ folgt auch aus dem „Kernsatz“ Knopps (dies. Zbl. 24, 319). Dieser Satz wird vom Verf. speziell für den besonders von Knopp eingehend untersuchten Kern $x^{-1} f(t/x)$ in etwas modifizierter Form gegeben und nochmals bewiesen. Daraus folgt: Die C_k - und H_k -Mittelbildungen sind totalregulär ($k > 0$). Die Fragestellung für die Mittelbildungen wird übertragen auf den Mercerschen Satz in der Fassung von Knopp [Math. Z., Berlin 19, insb. S. 99 (1924)], d. h. Verf. beweist: Sei

$$\sigma_n = \alpha s_n + (1 - \alpha) \frac{p_0 s_0 + \dots + p_n s_n}{p_0 + \dots + p_n} \quad (\alpha > 0), \quad \sum_0^\infty p_n = \infty \quad (p_n > 0).$$

Für $0 < \alpha < 1$ hat $s_n \rightarrow \infty$ $\sigma_n \rightarrow \infty$ zur Folge, aber nicht umgekehrt, für $\alpha > 1$ folgt aus $\sigma_n \rightarrow \infty$ $s_n \rightarrow \infty$, aber nicht umgekehrt. Schließlich be-

trachtet Verf. die Integraltransformation $\sigma(x) = \alpha s(x) + (1 - \alpha) \int_0^x \frac{X'(t)}{X(x)} s(t) dt$,

[$X(0) = 0$, $X'(x) > 0$ und stetig] und beweist für diese sowohl das Analogon zum Knopp-Mercerschen Satz als auch die von ihm gegebene Erweiterung im Falle unendlicher Grenzwerte.

Schmetterer (Wien).

Leng, Sen-ming: Note on Cauchy's limit theorem. Amer. math. Monthly 57, 28—31 (1950).

O. Toeplitz lenkte die Blickrichtung von der Untersuchung spezieller Mittelbildungen weg auf Fragestellungen über allgemeine lineare Mittelbildungen $t_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} s_\nu$ ($\mu = 1, 2, \dots$), indem er notwendige und hinreichende Bedingungen für $(a_{\mu\nu})$ angab dafür, daß aus $s_\nu \rightarrow s$ stets folgt $t_\mu \rightarrow s$. Verf. versucht, noch einen Schritt weiterzugehen, indem er auf die Rahmenvoraussetzung verzichtet, daß die t_μ Linearverbindungen der s_ν sein sollen. An die Stelle der Linearformen $\sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu$ werden Funktionen $f_\mu(x_1, x_2, \dots)$ gesetzt, und es werden die Folgen $t_\mu = f_\mu(s_1, s_2, \dots)$ gebildet. Die vom Verf. angegebenen notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß aus $s_\nu \rightarrow s$ folgt $t_\mu \rightarrow s$, enthalten die Folgen s_ν selber, und sind nichts weiter als Kriterien für die Konvergenz von $t_\mu \rightarrow s$ (für jede einzelne Folge $s_\nu \rightarrow s$).

R. Schmidt (München).

Henstock, R.: The efficiency of matrices for bounded sequences. J. London math. Soc. 25, 27—33 (1950).

Eine lineare Mittelbildung $(a_{\mu\nu})$ wird als konvergenzerzeugend (efficient) für die Folge s_ν bezeichnet, wenn die Folge $t_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} s_\nu$ konvergiert. R. G. Cooke

und A. M. Barnett [J. London math. Soc. **23**, 211—221 (1949); dies. Zbl. **34**, 327] haben gezeigt, daß $(a_{\mu\nu})$ bereits dann für die beschränkte Folge s_ν mit nur endlich vielen Häufungswerten konvergenzerzeugend ist, wenn $(a_{\mu\nu})$ konvergenzerzeugend ist für gewisse endlich viele, nur von den s_ν abhängige Folgen, deren Glieder nur der Werte 0 und 1 fähig sind. Hieran anknüpfend wird gezeigt: Die Folge s_ν sei beschränkt, etwa $|s_\nu| \leq b - \delta$ mit einem $\delta > 0$. Die Folge $\xi_1 = -b$, $\xi_2 = +b$, $\xi_3 \xi_4, \dots$ liege überall dicht in $(-b, +b)$, ebenso die Folge $\eta_1 = -b$, $\eta_2 = +b$, η_3, η_4, \dots . Es bedeute $\sigma_\nu^{(n)} = 1$, falls $\Re s_\nu \leq \xi_n$, $\sigma_\nu^{(n)} = 0$ sonst, $\tau_\nu^{(n)} = 1$, falls $\Im s_\nu \leq \eta_n$, $\tau_\nu^{(n)} = 0$ sonst. Wenn dann $(a_{\mu\nu})$ konvergenzerzeugend ist für jede Folge $\sigma_1^{(n)}$, $\sigma_2^{(n)}, \dots$ und $\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \dots$, dann ist $(a_{\mu\nu})$ auch konvergenzerzeugend für die Folge s_ν . — Ferner Ergänzungen und Verschärfungen für $a_{\mu\nu} \geq 0$ und für spezielle Typen von Folgen s_ν .
R. Schmidt (München).

Goldoni, Gino: Sulla coincidenza dei concetti di sommabilità ordinaria e secondo Poisson-Abel delle serie numeriche. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena **3**, 14—17 (1949).

Es wird gezeigt: „Wenn für ein $\sigma > 1$ und ein $\eta > 0$ sowohl $n^{1/\sigma} \cdot a_n \rightarrow 0$ wie auch $n^{-1/(\sigma+\eta)} \cdot \sum_0^n \nu a_\nu \rightarrow 0$ strebt, dann folgt aus der A -Summierbarkeit der Reihe $\sum a_\nu$ die Summierbarkeit dieser Reihe im gewöhnlichen Sinne“. — Es handelt sich hier um einen Satz von der Tragweite des Tauberschen Satzes (also eines $o-A \rightarrow K$ -Satzes), und nicht etwa, wie es scheinen könnte, um einen solchen von der Tragweite des Littlewoodschen Satzes (also eines $O-A \rightarrow K$ -Satzes).

R. Schmidt (München).

Bosanquet, L. S.: An extension of a theorem of Andersen. J. London math. Soc. **25**, 72—80 (1950).

Ist ϱ reell, $k > -1$, so gilt nach A. F. Andersen [Proc. London math. Soc., II. S. **27**, 39—71 (1928); vgl. ferner E. C. Winn, J. London math. Soc. **7**, 227—230 (1932); dies. Zbl. **5**, 202] Satz (A): (1) Ist $\varrho \neq 0$, so folgt aus der (C, k) -Summierbarkeit von $\sum A_n^{\varrho-1} u_n$ die $(C, k+1)$ -Summierbarkeit von $\sum A_n^\varrho \Delta^1 u_n$ zur gleichen Summe; (2) ist $\sum A_n^\varrho \Delta^1 u_n$ $(C, k+1)$ -summierbar, dann gibt es eine Zahl U , so daß $\sum A_n^{\varrho-1} (u_n - U)$ zur gleichen Summe (C, k) -summierbar ist. Dabei ist $\Delta^1 u_n = u_n - u_{n+1}$, $\Delta^2 u_n = \Delta^1 u_n - \Delta^1 u_{n+1}, \dots$, $\sum = \sum_{n=0}^\infty$, $A_n^\sigma = \binom{n+\sigma}{n}$ und (C, k)

das Cesàrosche Summierungsverfahren k -ter Ordnung. Durch wiederholte Anwendung von (A) lassen sich für positives ganzes s die (C, k) -Summierbarkeit von $\sum u_n$ und die $(C, k+s)$ -Summierbarkeit von $\sum A_n^s \Delta^s u_n$ zueinander in Beziehung setzen. Läßt sich diese Beziehung ausdehnen auf reelle Werte s , für welche etwa, im Anschluß an S. Chapman [Proc. London math. Soc., II. S. **9**, 369—409 (1911)],

$\Delta^s u_n = \sum_{\nu=n}^\infty A_{\nu-n}^{-s-1} u_\nu$ zu setzen wäre? Schon Andersen warf diese Frage auf,

jedoch ohne sie zu beantworten. Verf. behandelt die Frage in modifizierter Form, anknüpfend an den von ihm und H. C. Chow [J. London math. Soc. **16**, 42—48 (1941)] bewiesenen, zu (A) analogen Satz (B): (1) Aus der (C, k) -Summierbarkeit von $\sum n^{\varrho-1} u_n$ folgt die $(C, k+1)$ -Summierbarkeit von $\sum n^\varrho \Delta^1 u_n$; (2) ist $\varrho \neq 0$ und $\sum n^\varrho \Delta^1 u_n$ $(C, k+1)$ -summierbar, dann gibt es eine Zahl U , so daß $\sum n^{\varrho-1} (u_n - U)$ (C, k) -summierbar ist. An die Stelle der Differenzenbildung setzt

nun Verf. die Umkehrung der Summenbildung. Es sei $S^{-s}(u_n) = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-s-1} u_\nu$ (s reell); dann ist $S^{-1}(u_n) = u_n - u_{n-1}$ (mit $u_{-1} = 0$) und (für reelle α, β)

$$S^\alpha \{S^\beta(u_n)\} = S^{\alpha+\beta}(u_n).$$

Ist λ positiv ganz, so lassen sich durch wiederholte Anwendung von (B) die (C, k) -Summierbarkeit von $\sum n^\varrho u_n$ und die $(C, k+\lambda)$ -Summierbarkeit von $\sum n^{\varrho+\lambda} S^{-\lambda}(u_n)$

zueinander in Beziehung setzen. (Die zunächst sich einstellende Reihe $\sum n^{e+\lambda} S^{-\lambda}(u_{n+\lambda})$ läßt sich auf Grund eines Hilfssatzes von Hardy und Littlewood [Proc. London math. Soc., II. S. 27, 327—348 (1928)] durch $\sum n^{e+\lambda} S^{-\lambda}(u_n)$ ersetzen.) Diese Beziehung nun verallgemeinert Verf. auf nicht notwendig positiv-ganzes λ . Satz 1: Es sei $\varrho < 0$, $k > -1$, $\varrho + \lambda < 0$, $k + \lambda > -1$; ist $\sum n^e u_n$ (C, k) -summierbar, so ist $\sum n^{e+\lambda} S^{-\lambda}(u_n)$ $(C, k + \lambda)$ -summierbar, und umgekehrt. Beim Beweis wird der aus dem Äquivalenzsatz für die (C, k) - und (H, k) -Limitierung zu folgender Satz benützt, daß die Aussagen $C^\alpha \{C^\beta(s_n)\} \rightarrow l$ und $C^{\alpha'} \{C^{\beta'}(s_n)\} \rightarrow l$ äquivalent sind ($\alpha, \beta, \alpha', \beta' > -1$, $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$; $C^\alpha(s_n) = S^\alpha(s_n)/A_n^\alpha$). Ferner gilt Satz 2: Es sei $k > -1$, $k + \lambda > -1$, $\varrho \neq 0, 1, \dots$; ist $\sum n^e u_n$ (C, k) -summierbar, dann gibt es Konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, so daß

$$\sum n^{e+\lambda} \left\{ S^{-\lambda}(u_n) - \sum_{\mu=1}^p \alpha_\mu A_n^{-\lambda-\mu} \right\}$$

$(C, k + \lambda)$ -summierbar ist; die Behauptung bleibt im Fall $\varrho = 0, 1, \dots$ genau dann richtig, wenn $\varrho + \lambda = 0, 1, \dots$ ist. Die Sätze 1 und 2 gelten auch, wenn die C -Summierbarkeit durch absolute C -Summierbarkeit ersetzt wird. Meyer-König.

Chandrasekharan, K. and Otto Szász: On Bessel summation. Amer. J. Math. 70, 709—729 (1948).

Denote $J_\mu(t)$ the Bessel function of order $\mu > -\frac{1}{2}$ and let

$$\alpha_\mu(t) = 2^\mu \Gamma(\mu + 1) t^{-\mu} J_\mu(t).$$

The series $\sum a_\nu$ is summable (J, μ) , say $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$, if $\sum a_\nu \alpha_\mu(\nu t)$ exists for small $t > 0$ and converges as $t \rightarrow 0$. The case $\mu = \frac{1}{2}$ denotes the familiar Riemann's summation with $\alpha_{\frac{1}{2}}(t) = t^{-1} \sin t$. The authors generalize some earlier results and they promise further applications to multiple Fourier series later. The main results are the following: 1. If $a_\nu = O(\nu^{-\delta})$ ($0 < \delta < 1$) and if $\sum_0^n a_\nu = s + o(n^{-\alpha})$ for any s and $0 < \alpha < \delta$, then $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$ for $\mu = \frac{1}{2} - \alpha(1 - \delta + \alpha)^{-1}$. The limit case $\alpha = 0$ was examined by several authors, f. e. the sufficiency of the condition $a_\nu = O(n^{-1})$ [O. Szász, Amer. J. Math. 67, 389—396 (1945)]. 2. Let A_r^ν denote the ν^{th} Cesaro mean of order r . If $\sum a_\nu \rightarrow (C, r + 1)$; $r > -1$ and $\sum_{\nu=0}^n |A_r^\nu| = O(n^{r+1})$, then $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$ follows for $\mu > r + \frac{1}{2}$. This theorem is the generalization of a result of K. Chandrasekharan [Proc. Indian Acad. Sci. 17, 219—229 (1943)]. In his paper Chandrasekharan proved that the condition $\sum a_\nu \rightarrow (C, r)$ is not sufficient for $\sum a_\nu \rightarrow (J, r + \frac{1}{2})$. They give now a sufficient condition of this kind: 3. Let $T(t) = \sum_{\nu \leq t} a_\nu$ and let be

$$T^r(x) = 2r \int_0^x (x^2 - t^2)^{r-1} t T(t) dt \quad (r > 0).$$

Suppose that $\sum a_\nu \rightarrow (C, r)$; $r \geq 0$ and that $\int_\omega^{\lambda\omega} |dT^r(x)| = O(\omega^{2r})$ ($\lambda > 1$) as $\omega \rightarrow \infty$. It follows that $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$, where $\mu \geq r - \frac{1}{2}$ for r integer and $\mu \geq [r] + \frac{1}{2}$ in the general case. Especially, when $\sum a_\nu$ converges and $\sum_\omega^{\lambda\omega} |a_\nu| = O(1)$, then $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$ follows for $\mu > -\frac{1}{2}$. — They give still two theorems, but these are too long to be written here. The first one is connected with a result of Chandrasekharan, according which from $\sum a_\nu \rightarrow (J, \mu)$ the summability $\sum a_\nu \rightarrow (C, r)$, $r > \mu + \frac{1}{2}$ follows. The second one gives some additional results for the summability of Fourier series.

Gál (Princeton).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bernštejn, S. N.: Über die beste Annäherung analytischer Funktionen mit Hilfe ganzer Funktionen von endlichem Geschlecht. Doklady Akad. Nauk SSR, n. S. 56, 891—894 (1947) [Russisch].

Frühere Ergebnisse des Verf. und von Achyesser aus den Jahren 1940/46 — die dem Ref. unzugänglich sind — geben Anlaß zur Formulierung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß eine auf der ganzen x -Achse beschränkte Funktion $f(x)$ dort unbegrenzt oft differenzierbar sei und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x \sqrt[n]{|f^{(n)}(x)| : n!} \leq \text{const.} \quad (-\infty < x < \infty)$$

erfülle. Folgerungen in der Richtung: Wann ist dann $f(x)$ sogar ganze Funktion. Zusammenhang mit einem Satz von de la Vallée Poussin (Leçons sur l'approximation des fonctions continues, p. 150; Paris 1918). *Egon Ullrich* (Gießen).

Timan, A. F. und M. F. Timan: Der verallgemeinerte Stetigkeitsmodul und die beste Annäherung im Mittel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 17—20 (1950) [Russisch].

Verf. betrachten die periodischen Funktionen mit integrierbarer p -ter Potenz ($p > 1$) und erklären die Norm in diesem Funktionenraum durch

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Sie teilen ohne Beweis einige Sätze mit, die asymptotische Beziehungen zwischen den Normen $\|f(x+h) - f(x-h)\|_{L_p}$, $\|D_h^2 f(x)\|_{L_p}$, ... und der besten Annäherung der Funktion durch trigonometrische Polynome $\inf_{T_n} \|f(x) - T_n(x)\|_{L_p}$ ausdrücken.

Weitere Sätze betreffen das Verhalten der aus den Fourier-Koeffizienten der Funktion gebildeten Reihen. *W. Hahn* (Berlin).

Doronin, G. Ja.: Einige Ungleichungen für die Approximation durch trigonometrische Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 487—490 (1949) [Russisch].

Es wird die Frage nach der Approximation periodischer Funktionen $f(x)$ der Periode 2π durch die Teilsummen s_n ihrer Fourierreihe bzw. durch gewisse trigonometrische Polynome S_n behandelt. Kolmogoroff hat gezeigt:

$$\sup_{f \in W^{(r)}} |f(x) - s_n| = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} + O(n^{-r}),$$

wenn $W^{(r)}$ die Klasse der o. a. Funktionen mit $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ ($r \geq 1$) bedeutet. (Vgl. dies. Zbl. 11, 345.) Für die periodischen Funktionen aus $\text{Lip } \alpha$ (mit der Konstante 1), $0 < \alpha \leq 1$, bewies Nikolsky [Approximations of periodic functions by trigonometrical polynomials, Trudy mat. Inst. Steklov 15 (1945)]

$$\sup_{f \in \text{Lip } \alpha} |f - s_n| = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\log n}{n^\alpha} \int_0^{\pi/2} t^\alpha \sin t \, dt.$$

Verf. zeigt in beiden Fällen, daß diese Ergebnisse bei Betrachtung einer festen Funktion aus $W^{(r)}$ bzw. $\text{Lip } \alpha$ nicht verbessert werden können, also z. B. im Falle des Satzes von Kolmogoroff: Es gibt ein $f \in W^{(r)}$, so daß

$$|f - s_n| > \frac{4}{\pi^2} (1 - \varepsilon_n) \frac{\log n}{n^r} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_n = o(1).$$

— $W^{(r)} L$ sei die Klasse der Funktionen mit L -integrierbarer r -ter Ableitung $\left(\int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x)| dx \leq 1 \right)$. Nikolsky hat in der Arbeit „Approximation of functions in the mean by trigonometrical polynomials“, Izvestija Acad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 205—256 (1946) die Frage nach den besten Approximationen periodischer Funktionen

durch trigonometrische Polynome bezüglich der in L definierten Norm untersucht und

z. B. bewiesen $\sup_{f \in W^{(r)} L} \|f - s_n\|_L \sim \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r}$. Verf. erhält für jedes feste $f \in W^{(r)} L$

$$\|f - s_n\|_L = o\left(\frac{\log n}{n^r}\right).$$

Ein analoges Ergebnis wird für die trigonometrischen Polynome S_n erhalten, welche die bestmögliche Approximation für die Funktionen aus $W^{(r)} L$ liefern. Schließlich wird die Fragestellung für die Klasse der Funktionen mit L^2 -integrierbarer r -ter Ableitung bei Zugrundelegung der Metrik in L^2 untersucht. Abgesehen von einer Skizzierung der beim Satz von Kolmogoroff erwähnten Konstruktion einer passenden Funktion $f \in W^{(r)}$, welche in Anlehnung an Nikolsky „On interpolation and best approximation of differentiable periodic functions by trigonometrical polynomials“, *Izvestija Acad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **10**, 393—410 (1946) erfolgt, werden keine Beweise gegeben.

Schmetterer (Wien).

Cheng, Min-Teh: Some Tauberian theorems with application to multiple Fourier series. *Ann. Math., Princeton, II. S.* **50**, 763—776 (1949).

Sei durchweg $f(t)$ L -integabel in jedem endlichen Intervall und für ein positives q

$$(1) \quad \int_0^T |f(t)| dt < M T^q \text{ für jedes } T > 0.$$

Ist $K(t)$ definiert in $(0, \infty)$ und (I) $K(t) t^{q-1} \in L(0, \infty)$; (II) $K'(t) t^q \in L(0, B)$ für jedes $B > 0$; (III) $|K(t)| \leq K_0(t)$ für jedes $t > 0$, $t^q K_0(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $K'_0(t) t^q \in L(0, \infty)$, so zeigt Bochner [als Verallgemeinerung einiger Sätze von Wiener, Bochner-Hardy, vgl. etwa Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, S. 30], daß

$$(2) \quad R^{-q} \int_0^R f(t) K(t/R) dt \rightarrow A q \int_0^\infty K(t) t^{q-1} dt \text{ bei } R \rightarrow \infty,$$

aus

$$(3) \quad T^{-q} \int_0^T f(t) dt \rightarrow A, \text{ bei } T \rightarrow \infty,$$

folgt. — Diesen Satz ergänzend, zeigt Verf., daß (2), bei $R \rightarrow 0$, aus (3), bei $T \rightarrow 0$, folgt, und daß die obengenannten Bedingungen für (4) $K(t) = (J_\mu(t) t^{-\mu})^n$ erfüllt sind, wenn $\mu > 0$ und $0 < q < n(\mu + \frac{1}{2})$ ist, wobei $J_\mu(x)$ die Besselsche Funktion μ -ter Ordnung bedeutet. Insbesondere ($\mu = \frac{1}{2}$) gelten die beiden Sätze für

$$(5) \quad K(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n, \quad 0 < q < n. \text{ Im Falle (5), für gerades } n \geq 2 \text{ und } q = 1,$$

zeigte Wiener [On a theorem of Bochner and Hardy, *J. London math. Soc.* **2**, 118—123 (1927)], daß bei positivem $f(t)$ auch die Umkehrung gilt. In dieser Richtung zeigt Verf., daß bei (4) mit $\mu > 0$, $n = 1$ und $0 < q < \mu < \frac{1}{2}$, wie auch bei (5) für beliebiges ganzes n und $0 < q < n$, die Beziehung (3) (bei $T \rightarrow \infty$ bzw. $T \rightarrow 0$) aus (2) (bei $R \rightarrow \infty$ bzw. $R \rightarrow 0$) folgt, wenn $f(t) \geq 0$ ist und die Bedingung (1) erfüllt. — Als Anwendung dieser Sätze zeigt Verf.: Sei $f(x_1, \dots, x_k)$ summabel für $0 \leq x_\nu \leq 2\pi$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, und periodisch mit der Periode 2π . Ist f nicht negativ in der Umgebung des Punktes Y , so ist die Fourierreihe in Y entweder summierbar durch jedes Rieszsche Mittel der Ordnung $> (k-1)/2$, oder sie ist überhaupt nicht durch diese Mittel summierbar. Damit sie summierbar sei zur Summe $S 2^{k/2-1} \Gamma(k/2)$, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_0^T (f_Y(t) - S) t^{k-1} dt = o(T^k), \quad T \rightarrow 0,$$

sei, wobei $f_Y(t)$ die sphärische Mittelfunktion von f an der Stelle Y bedeutet.

Karamata (Zemun).

Eselangon, Ernest: Sur la représentation de certains phénomènes par des sommes de fonctions périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1044—1047 (1949).

Bei manchen physikalischen (z. B. akustischen oder elektromagnetischen) Schwingungsvorgängen treten Additions- und Subtraktionsschwingungen auf. Allgemein läßt sich ein periodischer Vorgang, der durch fundamentale Frequenzen ν_1, \dots, ν_p angeregt wird, mathematisch in eine Reihe von periodischen Gliedern mit den Frequenzen $m_1 \nu_1 + \dots + m_p \nu_p$ (m_1, \dots, m_p beliebige ganze Zahlen) entwickeln, wobei auch der Fall mit berücksichtigt worden ist, daß die Wirkungen der anregenden Frequenzen nicht voneinander unabhängig sind. Verf. stellt einige grundsätzliche Betrachtungen an über die Form solcher Entwicklungen, sowie über die etwas verschwommenen Begriffe „physikalischer Sinn“ oder „Realität“ der Additionsschwingungen und über die Fähigkeit der menschlichen Sinne (Ohr und Auge) zu analysieren, d. h. die Komponenten zusammengesetzter akustischer oder optischer Schwingungen (Töne und Farben) einzeln zu erkennen. *K. Stumpff* (Vogelsang).

Picone, Mauro: Vedute matematiche sull'analisi dei periodi. Rend. Sem. mat. fis., Milano **19**, 17—30 (1949).

Das allgemeine Problem der Periodenanalyse wird von rein mathematischem Gesichtspunkt aus betrachtet. Es wird gezeigt, daß die Analyse einer für alle reellen t definierten Funktion $f(t)$ auf Grund eines beschränkten Intervalls ($0 \leq t \leq T$) bekannter Funktionswerte nur dann zu eindeutigen und für alle t gültigen Ergebnissen führt, wenn $f(t)$ Lösung einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist. Zwei Methoden zur Bestimmung der Konstanten der periodischen Komponenten werden entwickelt. Die erstere ist in speziellerer Form schon 1909—1911 durch Arbeiten von Oppenheim, Höpfner und Bruns bekannt geworden. *K. Stumpff* (Vogelsang ü. Seesen).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Barrucand, Pierre-A. et Serge Colombo: Sur la fonction $v(t, n)$. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1335—1337 (1950).

Die in f, n ganze Transzendente

$$\int_n^\infty \frac{dv \, tv}{\Gamma(v+1)} = v(t, n) = e^t + e^t \int_n^{n+1} \frac{ds}{\Gamma s} \int_\infty^t dv \, e^{-v} v^{s-1}$$

kann mit Laguerres Polynomen $L_n(x)$ in Verbindung gebracht werden. Für $n=0, 1, \dots$ entsteht z. B.:

$$\int_0^\infty dx \, L_n(x) [1 - e^{-x} v(x, 0)] = \int_{0^+}^\infty \frac{dz \, z^{-n-1}}{\ln(1-\bar{z})}.$$

Wilh. Maier (Jena).

Frame, J. S.: An approximation to the quotient of gamma functions. Amer. math. Monthly **56**, 529—535 (1949).

Verf. stellt die Formel

$$\frac{\Gamma(n + (1+u)/2)}{\Gamma(n + (1-u)/2)} = \left(n^2 + \frac{1+u^2}{12}\right)^{u/2} e^{-E_n(u)} \quad \text{mit} \quad E_n(u) = \frac{u(1-u^2)(4-u^2)}{6!n^4} F_n(u)$$

auf und gibt für $F_n(u)$ eine asymptotische Entwicklung. $F_n(u)$ wird für $u=0, \frac{1}{2}, 1, 2$ und $n=1, 2, 3, 4$ tabuliert. Damit kann man aus der angegebenen Formel den Quotienten der Gammafunktionen für $n > 2$ und $|u| \leq 1$ auf vier geltende Ziffern genau berechnen. $F_n(u)$ ist eine gerade Funktion von n und u und liegt zwischen 0 und 1 für $n \geq 1, |u| \leq 1$. *Lenze* (München).

Darwin, C. G.: On Weber's function. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 311—320 (1949).

Für die Differentialgleichung $d^2y/dx^2 + (\frac{1}{4}x^2 - a)y = 0$ wird ein Hauptsystem von Lösungen aufgestellt, die zueinander spiegelbildlich bezüglich der Y -Achse sind. Für positive a ähnelt die Lösung einer Exponentialfunktion in der Nähe des Nullpunktes, bei $\pm 2/\sqrt{a}$ biegt die Lösungskurve um und erhält Wellencharakter. Die Amplitude ist groß für $x \rightarrow +\infty$ und klein für $x \rightarrow -\infty$, die Schwingungen haben dabei einen Phasenunterschied von 90° . Für negatives a hat die Kurve durchwegs Wellencharakter und Amplituden von gleicher Größenordnung für $x \rightarrow \pm\infty$. Für die Lösungen werden konvergente Potenzreihen für kleine x sowie asymptotische Entwicklungen für große x aufgestellt, von denen aber beide Arten für große $|a|$ unbrauchbar sind. Daher werden auch noch Reihen für diesen Fall entwickelt.

Lense (München).

Buchholz, Herbert: Besondere Reihenentwicklungen für eine häufig vorkommende zweireihige Determinante mit Zylinderfunktionen und ihre Nullstellen. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 356—367 (1949).

L'A. considera le due funzioni $\Delta_\nu(Rz, rz)$, $\Delta_\nu((Rz)', (rz)')$

$$\Delta_\nu(Rz, rz) = \frac{J_\nu(Rz) J_\nu(rz)}{Y_\nu(Rz) Y_\nu(rz)}, \quad \Delta_\nu((Rz)', (rz)') = \frac{J'_\nu(Rz) J'_\nu(rz)}{Y'_\nu(Rz) Y'_\nu(rz)}$$

dove J_ν e Y_ν sono le funzioni di Bessel di prima e di seconda specie di ordine ν , con ν e z complessi, R e r parametri reali, $R > r$, funzioni queste occorrenti nello studio delle onde elettromagnetiche in un cilindro circolare cavo. — Nella prima parte sono determinati gli sviluppi di $\Delta_\nu(Rz, rz)$ per le funzioni di seconda specie di Legendre $\mathfrak{Q}_\lambda^{\nu} \left(\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \right)$, oppure per le funzioni $J_{\lambda+1/2}[z(R-r)]$ o per le funzioni $J_\lambda(zR) J_\lambda(zr)$, ($\lambda = 0, 1, \dots$); gli sviluppi di $\Delta_\nu((Rz)', (rz)')$ si conseguono osservando che questa funzione si esprime linearmente per $\Delta_{\nu+1}(Rz, rz)$, $\Delta_\nu(Rz, rz)$, $\Delta_{\nu-1}(Rz, rz)$. — La seconda parte è dedicata allo studio degli zeri di $\Delta_\nu[h', (Rr)h'] = 0$. Supposto $\alpha = (R-r)/R$ infinitesimo, questa ha le radici $h = \nu(1-\alpha)^{-1/2}$, $h = \pi m/\alpha$ ($m = 1, 2, \dots$), le quali vengono successivamente precisate mediante i loro sviluppi in serie procedenti per le potenze di $\delta = (R-r)/2\sqrt{Rr}$. Delle radici di $\Delta_\nu(Rz, rz) = 0$ sono determinati i termini in $\delta^0, \delta^2, \delta^4$. Sansone.

Arbott, Wilton R.: Evaluation of an integral of a Bessel function. *J. Math. Phys., Massachusetts* **28**, 192—194 (1949).

Mit Hilfe der Laplace-Transformationen werden für das Integral

$$v(t, n) = 2n \int_0^t (J_{2n}(\gamma t)) dt/t$$

(J_{2n} Besselfunktion 1. Art vom Zeiger $2n$, $\gamma = \text{const}$) die beiden für numerische Berechnung geeigneten Darstellungen abgeleitet:

$$v(t, n) = 1 - \left(\frac{2}{\gamma t} \right) \sum_{k=1}^n (2k-1) J_{2k-1}(\gamma t) \quad \text{und} \\ v(t, n) = 1 - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (2n-p-1)!}{p! (n-p-1)! (n-p)!} A_{n-p}(\gamma t),$$

wobei A_p die bei Jahnke-Emde (Tables of functions, New York 1943, pp. 128a, 130—189) tabellarisierten Funktionen $A_p(\gamma t) = 2^p p! J_p(\gamma t)/(\gamma t)^p$ sind. — Die Koeffizienten der letzten Entwicklung werden bis zu $n = 9$ angegeben. Heinholt.

Picht, Johannes: Über Integrale von Funktionen, die Produkte Besselscher Funktionen enthalten. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 155—157 (1949).

Zusammenstellung der Formeln für die unbestimmten Integrale der Funktionen $x^{-q} J_n(x) J_m(x)$ mit natürlichen m, n, q ; mit Beweis für den allgemeinen Fall. Es ergeben sich Summen von Ausdrücken nach Art der Integranden.

Bödewadt (Brunoy).

Delerue, Paul: Note sur les propriétés des fonctions hyperbesséliennes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1333—1335 (1950).

Mitteilung einiger formaler Eigenschaften der in einer früheren Note (dies. Zbl. **34**, 211) erklärten Verallgemeinerungen der Besselschen Funktionen. Der Natur der Sache nach handelt es sich dabei lediglich um Spezialisierungen der zahlreichen Relationen, die zwischen höheren hypergeometrischen Reihen bestehen.
W. Hahn (Berlin).

Humbert, Pierre: Les fonctions de Mathieu et le calcul symbolique. Bull. Sci. math., II. S. **72**_I, 23—32 (1948).

L'Autore si propone di rendere più preciso il risultato, già noto, che la trasformata di Laplace-Carson di una funzione di Mathieu è ancora una funzione di Mathieu. Partendo dalle equazioni integrali stabilite in un'opera di McLachlan (Theory and application of Mathieu function, Oxford 1947; questo Zbl. **29**, 29), cui rimandiamo per i simboli, si trova:

$$\text{Gek}_{2n+1}(\arg \cosh i p/2 k, q) = - \frac{2 e^{-p} \text{se}_{2n+1}(\pi/2, q)}{\pi B_1^{(2n+1)}(q)} \cdot \int_0^\infty e^{pt} \sqrt{p^2/4k^2 + 1} \text{Se}_{2n+1}(\arg \cosh(1+t), q) dt,$$

e formule analoghe per Se_{2n} , Ce_{2n} , Ce_{2n+1} . Vengono infine stabilite nuove equazioni integrali tra funzioni di Mathieu. (Vedi questo Zbl. **29**, 209.) *C. Miranda* (Napoli).

Jackson, M.: On well-poised bilateral hypergeometric series of the type ${}_8\psi_8$. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) **1**, 63—68 (1950).

Die „basischen“ hypergeometrischen Reihen sind dadurch erklärt, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Koeffizienten nicht wie bei den gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen eine feste rationale Funktion des Index n ist, sondern eine rationale Funktion der „basischen“ Zahl $[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$). Diese Reihen haben oft auch Sinn, wenn sie beiderseits ins Unendliche fortschreiten (während die entsprechenden hypergeometrischen Reihen i. a. divergieren). Die Begriffsbildungen „well-poised“, „Saalschützian“ usw. lassen sich auf die basischen Reihen leicht ausdehnen, und man kann für diese speziellen Reihen zahlreiche Analoga zu den bekannten Transformationsformeln ableiten. Verf. folgert aus einer noch unveröffentlichten Formel von Sears einige Transformationsformeln für die Reihe vom Typ ${}_8\psi_8$, mittels deren diese durch einseitige basische Reihen von niedrigerer Ordnung dargestellt wird. Die Formeln sind zwar schön symmetrisch, lassen sich wegen ihrer Länge — sie enthalten 7 Parameter — jedoch hier nicht wiedergeben.
W. Hahn (Berlin).

Funktionentheorie:

● **Heinhold, Josef:** Theorie und Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. I. München: Leibniz Verlag, bisher R. Oldenbourg Verlag 1949. 213 S., DM 15,—, 63 Abb. u. 4 Bildtafeln.

Das vorliegende Lehrbuch behandelt den klassischen Stoff des ersten Semesters einer Vorlesung über Funktionentheorie. Es ist aus der Technischen Hochschule München hervorgegangen und betont demgemäß weniger allgemeine Gesichtspunkte als Brücken zur Anwendung: Fragen der Strömungen und Potentialtheorie, Praxis einfacher konformer Abbildungen, Integralrechnung bis zum Residuensatz, für den reichliches Beispielmaterial bis zum Ausblick auf Integraltransformationen geboten ist. Das Buch ist ausgezeichnet durch eine große Zahl von Übungsaufgaben, deren Lösungen am Schluß kurz mitgeteilt werden. Den Zugang nimmt der Verf. von unendlichen Reihen aus, und widmet im Zusammenhang damit auch den einfachen Funktionen verhältnismäßig eingehende Formelgruppen. — Das terminologische Durcheinander um „Gebiet“ und „Bereich“ — in der Topologie indessen

geordnet — ist leider durch eine neue Version vermehrt, die nicht beibehalten werden sollte. — Ein zweiter Band wird Fragen behandeln, die hier beiseite geblieben sind (Fortsetzung, Höhere Funktionen) bzw. dem Verf. aus seinen eigenen Arbeiten nahestehen (Konforme Abbildung). *Egon Ullrich* (Gießen).

Wright, E. M.: The asymptotic expansion of integral functions and of the coefficients in their Taylor series. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 409—438 (1948).

Verf. setzt die allgemeine Untersuchung fort, mit der er [dies. Zbl. **23**, 140 und Philos. Trans. R. Soc., London, A **239**, 217—232 (1941)] den Problemkreis schon seit Jahren auf breiter Front behandelt hat. Es geht darum, I. aus bekannter Asymptotik der Taylorkoeffizienten $c_0(n)$ an einer Stelle ($x = 0$) soweit als möglich auf die Asymptotik der ganzen Transzendenten $f(x)$ zu schließen: Es sei $f(x) = \sum c_0(n) x^n$. Dabei können die Bedingungen für $c_0(n)$ jetzt erheblich weiter gefaßt werden. Diese Erweiterung stellte sich in natürlicher Weise ein, seit Verf. das Problem I mit dem neuen, doch nahe verwandten Problem II verbunden untersucht: die Entwicklungsmittelsei variiert, $x = \lambda$, und $f(x) = \sum c_\lambda(n) (x - \lambda)^n$; nun soll die Asymptotik von $c_\lambda(n)$ aus der von $c_0(n)$ erschlossen werden. Dann erlaubt die erweiterte Fassung von I Aussagen über II unter tauglichen Annahmen über $c_0(n)$. — Es werde das Zeichen $g_1(t) \sim g_2(t)$ verschärfend dahin verstanden, daß $g_1(t) = g_2(t) \{1 + O(t^{-K})\}$ gelten solle für ein festes positives K ! 1940 war eine Strukturannahme vom Typus (κ komplex)

$$(1a) \quad c_0(t) = \sum_{\mu=1}^m \frac{\kappa A_\mu}{\Gamma(\kappa t + \alpha_\mu)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\kappa t + \alpha_{m+1})}\right)$$

gemacht worden, während jetzt gelten soll

$$(1) \quad c_0(t) \sim t^\beta e^{\psi(t)} \left(\frac{e}{\kappa t}\right)^{\kappa t} \quad \text{mit} \quad \psi(t) = \sum_{j=1}^J a_j t^{b_j}$$

und $0 \leq \Re b_j < 1$. Dann kann für ein gewisses Gebiet der x -Ebene

$$f(x) \sim \text{const } X^{1/(2+\beta)} e^{P(x)}$$

erschlossen werden, wobei X ein Zweig von $x^{1/\kappa}$ ist, $P(x)$ aber eine endliche Summe aus Potenzen von X mit $P(X) \sim X$ für $|X| \rightarrow \infty$. Diese Aussage gilt sogar für alle großen x , wenn $\Re 1/\kappa < \frac{1}{2}$ bleibt. Eine Verallgemeinerung erlaubt es, in der Voraussetzung über $c_0(n)$ das t^β , im Ergebnis $X^{1/(2+\beta)}$ durch Linearverbindungen solcher Potenzen zu ersetzen; aber es zeigt sich dabei noch keine befriedigend einfache Beziehung in den Koeffizienten, obwohl Regeln dazu mitgeteilt werden können. — Zum Problem II wird unter der Annahme (1) etwa

$$(2) \quad c_\lambda(n) \sim c_0(n) \exp \lambda \psi(n, \lambda)$$

bewiesen, wobei $\psi(n, \lambda)$ ein Polynom in λ ist, vom Grade $[1/\Re \kappa] - 1$, dessen Koeffizienten bei jeder λ -Potenz als endliche Summen unganzer Potenzen ($\leq n$) in n erscheinen; Erweiterung der Voraussetzung wie oben. — Ein Sonderfall von besonderem Interesse ist $\psi(t) \equiv 0$; dann gehört $f(x)$ zu der an den oben zitierten Stellen behandelten Klasse; ist dann noch $\Re \kappa > 1$, also $\psi(n, \lambda) \equiv 0$, so wird $c_\lambda(n) \sim c_0(n)$ und $f(x + \lambda)$ gehört zur nämlichen Asymptotik wie $f(x)$. Für $\Re \kappa < 1$ aber kann $\psi(n, \lambda) \not\equiv 0$ sein; $f(x + \lambda)$ fordert die bei Problem I vorgenommene Erweiterung. — Auch beweistechnisch zeigt $\Re \kappa \geq 1$ interessante Unterschiede. Bei > 1 genügt es, (1) für $t = n, n + 1, \dots$ zu fordern, um (2) leicht zu sichern, während das bei < 1 nicht hinreicht (Gegenbeispiel); daher wird hier (1) in einem (beliebig schmalen) Winkelraum um die positivreelle Achse angenommen, und der Beweis ist schwieriger. — Die schöne Untersuchung enthält eine große Fülle von wertvollen Einzelheiten, die sich der Andeutung im Referat entziehen. Die Voraussetzungen sind so weit, daß sie viele bekannte spezielle Funktionen decken, denen der Verf. übrigens mehrere Einzeluntersuchungen gewidmet hatte; sie berühren sich mit amerikanischen Arbeiten, überholen sie aber erheblich.

Egon Ullrich (Gießen).

Nehari, Zeev: Note on positive harmonic functions. J. London math. Soc. 25, 19—26 (1950).

Ist $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ regulär und $\Re f > 0$ für $|z| < 1$, so gilt bekanntlich die genaue Abschätzung $|a_n| \leq 2$ ($n = 1, 2, \dots$). Verf. verallgemeinert diesen Satz:

Ist $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ($a_0 = 1$) regulär und $\Re f > 0$ für $\varrho < |z| < 1$, so gilt

$$(1) \quad |a_n| \leq \frac{2}{1-\varrho^n}, \quad |a_{-n}| \leq \frac{2\varrho^n}{1-\varrho^n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für eine harmonische Funktion

$$u(r, \theta) = \gamma \log r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad \alpha_0 = 1,$$

welche eindeutig und positiv für $\varrho < r < 1$ ist, gilt

$$\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leq \frac{1}{1-\varrho^n} + \frac{2\gamma\varrho^n \log \varrho}{1-\varrho^{2n}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und eine analoge Abschätzung für $n < 0$. Verf. beweist weiter für harmonische Funktionen von drei Veränderlichen den Ungleichungen (1) analoge Relationen. Alle Abschätzungen sind bestmöglich.

V. Paatero (Helsinki).

Walsh, J. L.: The location of the critical points of simply and doubly periodic functions. Duke math. J. 14, 575—586 (1947).

Man kennt Sätze, welche, z. B. bei Polynomen und rationalen Funktionen, die Lage der Nullstellen der Ableitung $f'(z)$ an die Lage der Nullstellen der Funktion $f(z)$ binden. Einfache konforme Abbildung (Logarithmus) erlaubt es, daraus nahe-
liegende Konsequenzen für periodische (und doppelt-periodische) Funktionen zu ziehen, wieder in bezug auf Zusammenhänge zwischen den Nullstellen von Funktion und Ableitung — insbesondere unter Annahme über das infinitäre Verhalten, wenn man im Periodenstreifen gegen unendlich geht, oder Annahmen wie die, daß Null- und Polstellen im Streifen (oder Parallelogramm) durch gewisse Geraden getrennt werden. Da $\log f(z)$ harmonisch ist, liegt eine Übertragung auf harmonische Funktionen auf der Hand.

Egon Ullrich (Gießen).

Walsh, J. L. and E. N. Nilson: Note on the degree of convergence of sequences of polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 53, 116—117 (1947).

Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_n z^n$ habe den Konvergenzradius $\varrho > 1$; es sei $p_n(z)$ das Polynom n -ten Grades, welches $f(z)$ auf dem Einheitskreis $|z| \leq 1$ im Sinne von Tschebyscheff am besten annähert; sei $m_n = \max_{|z| \leq 1} |f(z) - p_n(z)|$.

Man weiß [Walsh, Interpolation and approximation ..., Chapter 4. Amer. math. Soc. Coll. Publ. 20 (1935); dies. Zbl. 13, 59], daß für jedes $f(z)$ obiger Art $\lim m_n = 1/\varrho$ gilt. Die Verf. beweisen sehr einfach: Notwendig und hinreichend, damit sogar $\lim m_n = 1/\varrho$ sei, ist, daß $f(z)$ nicht eine Reihe von lückenhafter Struktur im Sinne von Bourion sei (dies. Zbl. 8, 62).

Egon Ullrich (Gießen).

Walsh, J. L. and E. N. Nilson: On functions analytic in a region: Approximation in the sense of least p^{th} powers. Trans. Amer. math. Soc. 65, 239—258 (1949).

Wir geben ein etwas ausführlicheres Referat, das zugleich eine bemerkenswerte Entwicklung zu übersehen gestattet, auf die des Krieges wegen nicht in Referaten eingegangen werden konnte. — Sei R ein Gebiet beliebigen endlichen Zusammenhangs, S eine abgeschlossene Teilmenge (Bereich) davon, C_1 und C_0 deren Ränder. Sei dann $\varphi(z) = \omega(z, C_1; R-S)$ das harmonische Maß von C_1 in bezug auf das Restgebiet $R-S$, und wenn $R-S$ zerfällt, das System der harmonischen Maße in bezug auf die Komponenten; es wird angenommen, daß jede von diesen sowohl an C_1 wie an C_0 stößt. Weiter sei $\psi(z)$ konjugiert zu φ und τ die gesamte Variation von ψ längs C_1 , sowie C_v die Niveaulinie $\varphi = v$ bei $0 < v < 1$, endlich R_v das Vereinigungsgebiet von S mit dem Teil von $R-S$, wo $0 < \varphi < v$ gilt. — Es handelt sich um das folgende Näherungsproblem: $F(z)$ sei regulär analytisch auf S , und vielleicht sogar fortsetzbar in R_0 , jedenfalls aber nicht mehr in ganz R (oder ein gewisses $R_{\varrho'}$ mit $1 > \varrho' > \varrho > 0$). Dieses vorgegebene

$F(z)$ soll durch Funktionen $f(z)$ approximiert werden, welche in ganz R regulär analytisch angenommen werden, und zwar unter Vorschriften über beste Approximation in bezug auf S oder dessen Rand C_0 (oder auch ein C_v). — Die Klasse der zugelassenen Näherungsfunktionen werde nun in der Weise ausgeschöpft, daß erst eine Schrankenvorschrift in bezug auf C_1 gesetzt wird, gekennzeichnet durch eine Schranke M ; dadurch wird eine Teilklasse $f_M(z)$ herausgehoben; hinterher wird $M \rightarrow \infty$ genommen. — Aus der Klasse $f_M(z)$ wird dann „die“ Funktion $J_M(z)$ gesucht, welche $F(z)$ auf S oder C_0 „am besten“ approximiert, wieder im Sinne einer gewissen Maßbestimmung im Funktionenraum der $F(z) - f_M(z)$. — Während nun in früheren Arbeiten von Walsh u. a. (in diesem Zusammenhang zuerst dies. Zbl. 19, 404) die Maßbestimmungen durch den absoluten Betrag getroffen worden waren (seine obere Grenze bei Annäherung an C_1 , bzw. durch die Forderung von möglichst kleinen $\max_{C_0} |F(z) - f_M(z)|$), werden in dieser Arbeit grundsätzlich Integralmittel p -ter oder q -ter Ordnung zu den Maßbestimmungen im Funktionenraum benutzt, mit $0 < p, q \leq \infty$; p und q sind dabei beliebig, aber im Zuge der Betrachtungen fest zu denken; der Grenzfall ∞ entspricht der Bewertung durch das Betragmaximum. — Die Schrankenvorschrift auf C_1 geschieht, unter Bildung der Norm auf C_v

$$\mu_q(f, v) = \left\{ \frac{1}{\tau} \int_{C_v} |f(z)|^q d\psi \right\}^{1/q},$$

durch die Forderung nach gleichmäßiger Beschränktheit für alle $0 < v < 1$, also $\mu_q(f, v) \leq M$; das kennzeichnet die Klasse $f_M(z)$. Dann existieren bei $z \rightarrow \zeta$ auf C_1 längs $\psi = \text{const.}$ fast überall die Randwerte $f_M(\zeta)$ und bilden eine Randfunktion von der Lebesgueschen Klasse L^q für die Variable ψ auf C_1 ; es ist $\lim_{v \rightarrow 1} \mu_q(f_M, v) = \mu_q(f_M, 1)$ für $v \rightarrow 1$. Eine Reihe klassischer Randwertsätze sind natürlich übertragbar. Die Funktionen $f_M(z)$ bilden eine Normalfamilie. — Die Güte der Approximation wird entsprechend gemessen, im allgemeinen mit einer anderen Ordnung p , durch die Integralmittel $\mu_p(F - f_M, 0)$ bezogen auf den Rand C_0 von S . Aus der Klasse der Funktionen $f_M(z)$ beschränkter Norm ($\leq M$) wird die Funktion $J_M(z)$ bestimmt, welche dem Integralmittel nach alle anderen f_M untertrifft, also

$$m_M = \mu_q(F - J_M, 0) \leq \mu_q(F - f_M, 0).$$

Die Minkowskische Ungleichung sichert die Einzigkeit von J_M jedenfalls für $1 \leq p, q < \infty$ (und $q = \infty$). Zur Norm M gehört also m_M als bester Approximationsgrad. — Andererseits wird bei festem Approximationsgrad $m = \mu_p(F - f_m, 0)$ die Klasse $f_m(z)$ gebildet und aus ihr die Funktion kleinster Norm $G_m(z)$ auf C_1 bestimmt, mit $\mu_q(G_m, 1) \leq \mu_q(f_m, 1)$; Einzigkeit wie oben (und $p = \infty$). — Es werden Beziehungen für die beiden Funktionstypen J_M und G_m festgestellt: in gewissen Fällen fallen sie zusammen, jedoch nicht immer kann das gesichert werden — wegen der Struktur der Minkowskischen Ungleichung: Dann ergeben sich Aussagen in der Richtung, daß beste Approximation bei beschränkter Norm nur unter größter Norm (Erreichen von M) gelingt. — Die quantitativ gefaßten Hauptergebnisse schließen sich an ein Lemma von bemerkenswerter Struktur, welches Fortführungen im Sinne der Theorie des harmonischen Maßes erwarten läßt: Sei $F(z)$ jetzt regulär analytisch in R_0 , aber nicht mehr in $R_{0'} (0 < \varrho < \varrho' < 1)$, $f_n(z)$ eine Folge von Näherungsfunktionen wachsender Normen und zunehmender Approximationsgüte derart, daß für $\alpha > 0$, $\beta < 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\mu_q(f_n, 1)\}^{1/q} \leq e^\alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{\mu_p(F - f_n, 0)\}^{1/p} \leq e^\beta.$$

Dann ist notwendig

$$-\beta \leq \alpha \frac{\varrho}{1 - \varrho}.$$

Die Güte der Näherung, gemessen durch α , wird also eingengt durch die Freiheit im Wachsen der Normen, gemessen durch α , sowie andererseits durch die geometrische Konfiguration der vier Gebiete bzw. Randkurven C_0, C_0', C_0'', C_1 , welche entscheiden über Messung der Annäherung, Analytizitätsgebiet und Aufhören der Analytizität von F , Analytizität und Norm der Näherungsfunktionen: Hier wird diese Konfiguration nur durch den Ausdruck $\varrho/(1 - \varrho)$ vertreten; dahinter steckt aber das harmonische Maß und damit Aussagen von allgemeinerer Bedeutung; darauf möchte Ref. ausdrücklich hinweisen. Der Satz der Verff. bringt jedenfalls schon zum Ausdruck, wie „vorteilhaft“ es ist, die Näherungsfunktionen in „wesentlich größeren“ Gebieten analytisch zu wählen, als das gesicherte Existenzgebiet R_0 für die anzunähernde Funktion, bzw. als S, C_0 , welche der Entscheidung über die „beste“ unter den Näherungen zugrunde liegen. — Das Lemma führt auf eine längere Reihe von Einzelaussagen über die J_M und G_m in asymptotischer Hinsicht. — Die Verff. spezialisieren ihre Untersuchungen auf den Fall des Kreisinges C_0, C_1 bei $p = q = 2$, $F(z)$ als Potenzreihe im Einheitskreis; sinngemäß sei $r_0 < \varrho = 1 < r_1$. Hier können Extremalpolynome explizit angegeben werden, und mit ihrer Hilfe Ausdrücke für die J_M sowie exakte Approximationsmaße. Endlich geben die Verff. einen neuen Zusammenhang zwischen der allgemeinen, hier entwickelten Approximationstheorie, und der lückenhaften Struktur einer Potenzreihe im Sinne von Bourin (dies. Zbl. 8, 62).

Analog der Aussage im vorstehenden Referat (dort $p = q = \infty$) erkennen sie: Notwendig und hinreichend für lückenhafte Struktur der Potenzreihe $F(z)$ ist das Vorliegen der Ungleichung

$$\lim m_M^{1/\log M} < \overline{\lim} m_M^{1/\log M} \quad \text{für } M \rightarrow \infty$$

bei irgendeinem Wertepaar p, q aus $0 < p, q, \leq \infty$.

Egon Ullrich (Gießen).

Walsh, J. L. and W. E. Sewell: On interpolation to an analytic function in equidistant points: problem β . Bull. Amer. math. Soc. 55, 1177—1180 (1949).

In Ergänzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 25, 320) untersuchen die Verff. die Konvergenzgüte der Interpolationspolynome zu $f(z)$ unter folgenden Annahmen: $f(z)$ sei regulär analytisch im Kreisring $\varrho < |z| < 1/\varrho$; $p_n(z)$ sei das Interpolationspolynom je n -ten Grades in z und z^{-1} , welches mit $f(z)$ in den $(2n+1)$ -ten Einheitswurzeln wertegleich ist; ist dann noch $f(z)$ von der Klasse $L(p, \alpha)$, so besteht die Näherungsgüte

$$|f(z) - p_n(z)| \leq \frac{M}{\varrho^n n^{p+\alpha}} \quad \text{auf } |z| = 1$$

bei einem von n und z unabhängigen M . Ist $f(z)$ zudem stetig auf dem abgeschlossenen ϱ -Ring und gibt es überhaupt Polynome $P_n(z)$ obigen Baues, welche $f(z)$ auf dem Ringrand bis auf ε_n annähern, so leisten die $p_n(z)$ auf $|z| = 1$ eine Näherung bis auf $M\varepsilon_n \varrho^{-n}$. — Die Aussagen stehen als Beispiele für Verallgemeinerungen derart, daß $|z| = 1$ und der ϱ -Ring durch andere Jordan-Kurven bzw. Gebiete, die Einheitswurzeln durch feste Vorschriften über die Wahl der Knoten ersetzt werden.

Egon Ullrich (Gießen).

Walsh, J. L., W. E. Sewell and H. M. Elliott: On the degree of polynomial approximation to harmonic and analytic functions. Trans. Amer. math. Soc. 67, 381—420 (1949).

C being a rectifiable Jordan curve in the plane $z = x + iy$, denote by C the closure of its interior. A real function $u(z)$ belongs to the class $L(k, \alpha)$ on C resp. to the class $\log(k, \beta)$ on C if it is harmonic interior to C , continuous in \bar{C} and $\partial^k u / \partial s^k$ (s being the arc-length along C) satisfies on C a Lipschitz condition of order α ($0 < \alpha \leq 1$) resp. satisfies the condition

$$(*) \quad \left| \frac{\partial^k u(z_1)}{\partial s^k} - \frac{\partial^k u(z_2)}{\partial s^k} \right| \leq L |z_1 - z_2| |\log |z_1 - z_2||^\beta$$

for $|z_1 - z_2|$ sufficiently small. Similarly a complex function $f(z) \in L_A(k, \alpha)$ on C resp. $f(z) \in \log_A(k, \beta)$ on C if it is analytic interior to C , continuous in C and the one-dimensional derivative $f^{(k)}(z)$ satisfies on C a Lipschitz condition of order α ($0 < \alpha \leq 1$) resp. a condition analogous to (*). Let C_R denote the image of the circle $|w| = R$ ($R > 1$) under the conformal map of $|w| > 1$ onto the exterior of C . With different restrictions on C the main results are as follows: 1. If $u(z) \in L(k, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) on C and $f(z) = u(z) + i v(z)$, where $v(z)$ is the conjugate to $u(z)$, then for every n there exists a polynomial $\pi_n(z)$ (of order n) such that $|f(z) - \pi_n(z)| \leq M/n^{k+\alpha}$ for $z \in C$. 2. If for every n there exists a harmonic polynomial $p_n(z)$ such that $|u(z) - p_n(z)| \leq M/n^{k+\alpha}$ for $z \in C$, then $u(z) \in L(k, \alpha)$ on C if $0 < \alpha < 1$ and $u(z) \in \log(k, 1)$ on C if $\alpha = 1$. Further if $k + \alpha \geq 1$, $f(z) = u(z) + i v(z) \in L_A(k, \alpha)$ on C if $0 < \alpha < 1$ and $f(z) \in \log_A(k, 1)$ on C if $\alpha = 1$. 3. If $u(z) \in L(k, \alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) on C_R and $f(z) = u(z) + i v(z)$ then for every n there exists a polynomial $\pi_n(z)$ such that $|f(z) - \pi_n(z)| \leq M/n^{k+\alpha} R^n$ for $z \in C$. 4. If for every n there exists a harmonic polynomial $p_n(z)$ such that $|u(z) - p_n(z)| \leq M/n^{k+\alpha+1} R^n$ for $z \in \bar{C}$, $R > 1$, then $u(z) \in L(k, \alpha)$ on C_R if $0 < \alpha < 1$, $u(z) \in \log(k, 1)$ on C_R if $\alpha = 1$, $f(z) = u(z) + i v(z) \in L_A(k, \alpha)$ on C_R if $0 < \alpha < 1$, $f(z) \in \log_A(k, 1)$ on C_R if $\alpha = 1$. *Horváth (Paris).*

Cartan, Henri: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 61, 149—197 (1948).

P. Cousin hat in seiner Pariser Thèse [Acta math., Stockholm 19, 1—62 (1895)] die Aufgabe gestellt und in besonderen Fällen gelöst, analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu lokal vorgegebenen Nullstellenflächen zu konstruieren. Dieses seither in der Literatur viel behandelte Problem kann nach Verf. wie folgt formuliert werden: Sei E eine Punktmenge im Raume von n komplexen Veränderlichen; ist E^* irgendeine Teilmenge von E , so sei mit O_{E^*} der Ring der in E^* eindeutigen regulären Funktionen bezeichnet. Jedem Punkt P von E sei ein Hauptideal I_P des Ringes O_P so zugeordnet, daß die I_P in E ein kohärentes System bilden, d. h.: Zu jedem P gebe es eine Umgebung $U(P)$ und ein Hauptideal $I_{U(P)}$ in $O_{U(P)}$, derart, daß $I_{U(P)}$ in allen Punkten Q von $E \cap U(P)$ die zugeordneten I_Q erzeugt. Gesucht ist ein Hauptideal I_E in O_E , das alle I_P erzeugt. In der vorliegenden Arbeit erweitert Verf. das Problem dahin, daß an die Stelle der Hauptideale I beliebige Ideale der betreffenden Ringe, oder allgemeiner Moduln M^q von Systemen von q analytischen Funktionen treten. Außer der Frage nach der Existenz eines erzeugenden Ideals I_E bzw. Moduln M_E^q stellt sich dann die weitere Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit von I_E bzw. M_E^q . Einer erschöpfenden Behandlung dieser Probleme stehen besondere Schwierigkeiten entgegen, doch gelingt ihre Lösung in einem speziellen Falle: Sei E ein Regularitätsgebiet. In E sei ein kohärentes System von Idealen I_P so vorgegeben, daß jedes I_P eine aus $s \leq n$ Funktionen $f_P^{(1)}, \dots, f_P^{(s)}$ bestehende Basis besitzt und daß die Mannigfaltigkeit des Systems die Dimension $n - s$ hat [d. h. die Basisfunktionen $f_P^{(1)}, \dots, f_P^{(s)}$ jedes I_P besitzen in einer Umgebung $U(P)$ von P entweder keine gemeinsamen Nullstellen oder eine gemeinsame Nullstellenmannigfaltigkeit von der Dimension $n - s$]. Dann existiert ein gesuchtes Ideal I_E . Ist insbesondere E ein analytisches Polyeder, gegeben durch endlich viele Ungleichungen $|\varphi_k(z)| \leq 1$ mit in E regulären $\varphi_k(z)$, so ist I_E eindeutig bestimmt und besitzt eine endliche Basis. Zum Beweise wird eine Verallgemeinerung der sog. Cousinschen Heftungsprozesses aus einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 24, 223) wesentlich benutzt. — Folgerung: Werden im Regularitätsgebiet E durch eine Cousinsche Verteilung von Lokalfunktionen Nullstellenflächen N mit Ordnungen vorgegeben, so gibt es in E reguläre Funktionen $f(z) \not\equiv 0$, die auf N wenigstens in der vorgeschriebenen Ordnung verschwinden, derart, daß N genau der Durchschnitt der Nullstellenmannigfaltigkeiten dieser $f(z)$ ist. Stein (Münster i. W.).

Wintner, Aurel: On implicit analytic systems. Comment. math. Helvetici 23, 294—302 (1949).

Im Polyzylinder $|z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1, |w_1| < 1, \dots, |w_n| < 1$ des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n$ seien n reguläre Funktionen $f_i(z_1, \dots, z_m; w_1, \dots, w_n)$ gegeben, derart, daß dort $|f_i(z_1, \dots, z_m; w_1, \dots, w_n)| < 1$ ist und daß $f_i(0, \dots, 0; 0, \dots, 0) = 0, \frac{\partial f_i}{\partial w_j}(0, \dots, 0; 0, \dots, 0) = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$). Das Gleichungssystem $w_i = f_i(z_1, \dots, z_m; w_1, \dots, w_n)$ legt in einer Umgebung des Nullpunktes ein System von n regulären Funktionen $w_i(z_1, \dots, z_m)$ fest. Verf. zeigt, daß die $w_i(z_1, \dots, z_m)$ im gesamten Polyzylinder $|z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1$ regulär und dort absolut unter 1 bleiben. Hierzu wird die Folge der Iterierten

$$w_i^{(0)}(z_1, \dots, z_m) = f_i(z_1, \dots, z_m; 0, \dots, 0),$$

$$w_i^{(k)}(z_1, \dots, z_m) = f_i(z_1, \dots, z_m; w_1^{(k-1)}, \dots, w_n^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

in einer Nachbarschaft von $z_1 = \dots = z_m = 0$ als konvergent nachgewiesen; Anwendung des Häufungsstellenprinzips liefert sodann die Behauptung. Stein.

Taylor, Angus E.: New proofs of some theorems of Hardy by Banach space methods. Math. Mag., Texas 23, 115—124 (1950).

Es handelt sich um die Hardysche Verallgemeinerung des Hadamardschen Dreikreisesatzes. Letzterer besagt, daß der Logarithmus des Betragsmaximums $M(r)$

einer in $|z| < R$ regulären Funktion $f(z)$ für $0 < r < R$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist; die erste, daß für $p > 0$ allgemein $M_f(r) = \log \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}$

eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Der Hadamardsche Satz wird zunächst ausgedehnt auf „analytische“ Funktionen $\Phi(z)$, deren Argumente z einer komplexen Zahlenebene und deren Werte Φ einem komplexen Banachraum angehören (an Stelle von $|f|$ tritt dann die Norm $\|\Phi\|$). Verf. betrachtet weiter einen speziellen Banachraum B , dessen Elemente Funktionen f sind und der folgenden Bedingungen genügt: Mit $f(z)$ ist auch $f(e^{it}z)$ für jedes reelle t in B , wobei $\|f(e^{it}z)\| = \|f(z)\|$; $z^n \in B$ und $\|z^n\|$ ist beschränkt, $n = 0, 1, \dots$; außerdem sei $\left\| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right\| \|f\|$ beschränkt für jedes $f \in B$ und $n = 0, 1, \dots$. Für reelles r erweist sich $\log \|f(rz)\|$ als konvexe Funktion von $\log r$. Ein solches B ist z. B. die Gesamtheit aller f mit beschränktem $M_f(r)$ und $\|f\| = \sup M_f(r)$ ($0 < r < 1$). In diesem speziellen B wird $M_f(r) = \|f(rz)\|$, worauf im Falle $p \geq 1$ der Übergang vom Hadamardschen zum Hardyschen Satz vollzogen werden kann. Aumann (Würzburg).

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Levitan, B. M.: Verallgemeinerte fastperiodische Funktionen. Mat. Sbornik, n. S. 24 (66), 321—346 (1949) [Russisch].

Es sei $\varrho(t)$ ($-\infty < t < \infty$) eine reelle, nichtnegative, stetige und gerade Funktion; für $t \rightarrow \infty$ soll $\varrho(t) = O(t^{-3-\varepsilon})$ für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ gelten. Für gegebenes $\lambda > 0$ soll die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'' - (\varrho(t) + \lambda^2)u = 0, \quad u_{t=0} = 1, \quad u'_{t=0} = 0$$

mit $u(\lambda, t)$ bezeichnet werden. Für genügend große λ gilt die Formel

$$u(\lambda, t) = m_1(\lambda) \cos \lambda t + m_2(\lambda) \sin \lambda t + \frac{\sin \lambda t}{2\lambda} \int_t^\infty \varrho(\tau) d\tau + F(\lambda, t)$$

$$\text{mit } m_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \varrho(z) \sin \lambda z u(\lambda, z) dz, \quad m_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \varrho(z) \cos \lambda z u(\lambda, z) dz$$

und mit einer absolut integrierbaren Funktion $F(\lambda, t)$ [vgl. die frühere Arbeit des Verf., Mat. Sbornik, n. S. 17, 161—190 (1945), insbes. S. 169]. Sei $v(\lambda, t) = (m_1^2(\lambda) + m_2^2(\lambda))^{-1/2} u(\lambda, t)$. In Fortsetzung seiner genannten Arbeit stellt sich der Verf. das Problem, diejenigen Funktionen $f(x)$ bzw. $g(\lambda)$ zu charakterisieren, welche durch endliche Summen der Gestalt

$$(1) \quad \sum a_k v(\lambda_k, x) \quad \text{bzw.} \quad (2) \quad \sum a_k v(\lambda, x_k)$$

beliebig genau approximiert werden können, und zwar gleichmäßig für $-\infty < x < \infty$ bzw. für $0 < \lambda < \infty$. Es wird bewiesen: 1. Jede gerade stetige Funktion $f(x)$, für die die Lösung $w(x, y)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varrho(x)w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (w)_{y=0} = f(x), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

fastperiodisch in y ist, und zwar gleichmäßig in x , kann durch Summen (1) approximiert werden; 2. Jede stetige Funktion $g(\lambda)$, für die jede Funktion

$$\Phi_n(\lambda, \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(v) \left[\int_0^{2n} \left(1 - \frac{t}{2n} \right) \cos \lambda t v(\mu, t) v(v, t) dt \right] dv \quad (n = 1, 2, \dots)$$

fastperiodisch in λ ist, und zwar gleichmäßig in μ für $\mu \geq \eta > 0$, kann durch Summen (2) approximiert werden. Béla Sz. Nagy (Szeged).

Levin, B.: Über Funktionen, die durch ihre Werte auf einem gewissen Intervall bestimmt sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 757—760 (1950) [Russisch].

Sei Ω eine willkürliche Menge von reellen Zahlen; bezeichne $n_\Omega(t)$ die Anzahl der Punkte Ω , die zu $(-t, t)$ gehören, und sei $N_\Omega(R) = \int_0^R n_\Omega(t) t^{-1} dt$. Verf. beweist die folgenden Sätze: Sei $f(t)$ eine Stepanoffsche fastperiodische (S_p) Funktion [siehe z. B. J. Favard, *Fonctions presque-périodiques*, chapitre 5, Paris 1933; dies. Zbl. 7, 343] für die $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$; $\lambda_k \in \Omega$. Wenn $f(t)$ in einem Intervall der Länge d verschwindet und wenn $\lim_{R \rightarrow \infty} (N_\Omega(R) - d\pi^{-1}R - q^{-1} \ln R) = -\infty$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$), dann ist $f(x) \equiv 0$. — Ein ähnlicher Satz gilt für den Fall, wo alle a_k reell sind. — Sei $\sigma(\lambda)$ eine Funktion von beschränkter Schwankung. Verf. nennt ein Konstanzintervall (a, b) dieser Funktion extremal, wenn solche $\alpha < a$ und $b < \beta$ existieren, daß $\sigma(\lambda)$ in (a, b) kleiner (oder größer) ist, als in (α, a) und (b, β) . Dies ist eine Verallgemeinerung der extremalen Punkte von $\sigma(\lambda)$. Sei $n_0(t)$ die Anzahl der extremalen Intervalle, die in $(-t, t)$ liegen, und sei $N_0(R) = \int_0^R n_0(t) t^{-1} dt$. Wenn $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} d\sigma(\lambda) = 0$ in $(-d/2, d/2)$, aber nicht identisch verschwindet, dann ist $\lim_{R \rightarrow \infty} (N_0(R) - d\pi^{-1}R) > -\infty$. — Endlich kann man mit Hilfe eines Satzes von M. Krejn [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 309—326 (1947); dies. Zbl. 33, 365] das folgende Resultat beweisen: Wenn $f(t) \in (S_p)$ in $(\alpha, \alpha + d)$ verschwindet und $\lim_{R \rightarrow \infty} (N_f(R) - d\pi^{-1}R - \sigma \ln R) = -\infty$ ($1 + q^{-1} \geq \sigma > q^{-1}$), dann gilt $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi'(i\lambda_k)^{-1} e^{i\lambda_k t}$. Hier ist $\psi(z) = \left(\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \right)^{-1}$ eine ganze Funktion und $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \ln |\psi(R e^{i\theta})| = d \cos \theta$ für $|\theta| < \pi/2$ und $= 0$ für $|\pi - \theta| < \pi/2$. Verf. vergaß $N_f(R)$ zu definieren; es bedeutet $N_\Omega(R)$ für den Fall $\Omega = (-\infty, +\infty)$. Gál (Princeton).

Krejn, M. und B. Levin: Über ganze fastperiodische Funktionen vom Exponentialtypus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 285—287 (1949) [Russisch].

Verff. betrachten die Klasse $[A]$ derjenigen fastperiodischen Funktionen, deren ganzes Spektrum im Intervalle $[-A, A]$ liegt und bei denen $\pm A$ zum Spektrum gehören. Alle Nullstellen einer Funktion $f(z) \in [A]$ liegen in einem Streifen $|\Im z| < M < \infty$, und man kann sie nach aufsteigenden Realteilen anordnen. Verff. charakterisieren die Funktionen der Klasse $[A]$ auf folgende Weise: Eine Funktion $f(z)$ gehört dann und nur dann zur Klasse $[A]$, wenn 1. die Nullstellen a_k von $f(z)$ eine fastperiodische Menge bilden, 2. die Funktion $f(z)$ in der Gestalt

$$(1) \quad f(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} c z^m \sum_{-N}^N (1 - z/a_k) \quad (m \geq 0, a_k \neq 0)$$

entsteht und 3. $a_k = k\pi/\Delta + \psi(k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ist, wo $\psi(z) \cdot e^{-i\pi z}$ eine ganze, auf der reellen Achse beschränkte Funktion von Exponentialtypus mit $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \log |\psi(z) e^{-i\pi z}|/|z| \leq \pi$ ist. (Eine Punktmenge $\{a\}$ ist fastperiodisch, wenn es zu jedem $\varepsilon (> 0)$ eine relativ-dichte Menge reeller Zahlen τ gibt, so daß eine umkehrbar-eindeutige Abbildung der Punktmenge $\{a + \tau\}$ auf $\{a\}$ existiert, bei der die Entfernung der einander entsprechenden Punkte $< \varepsilon$ ist.) — Unter gewissen speziellen Voraussetzungen über $\psi(x)$ kann man über $f(z)$ mehr behaupten. Ist z. B. $\psi(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion, deren Fouriersche Reihe absolut konvergiert, und ist $a_k = k\pi/\Delta + \psi(k)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \Delta > 0$), so hat auch die durch die Formel (1) gegebene Funktion $f(z)$ eine absolut konvergente Fouriersche Reihe. Die Umkehrung des letzten Satzes ist i. a. nicht richtig. — Ohne Be-

Béla Sz.-Nagy, K. Tandori (Szeged).

Stepanov, V. V.: Über eine Klasse fastperiodischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 297—300 (1949) [Russisch].

Verf. bewies in einer früheren Arbeit [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 171—174 (1949)], daß die Beschränktheit oder Unbeschränktheit der unendlichen Hermiteschen Form

$$(1) \quad \Phi(x) = \sum_{m,n} \varphi(\lambda_m - \lambda_n) x_m \bar{x}_n,$$

wo $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} p(t) dt$, nur von der Folge $\{\lambda_n\}$ abhängt. (Dabei ist $p(t)$ eine gegebene, nichtnegative, beschränkte, meßbare, für $|t| \rightarrow \infty$ genügend rasch nach 0 strebende Funktion.) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die λ_n in aufsteigender Folge angeordnet sind. — Auf Grund dessen betrachtet Verf. den Fall $p(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/4}$ und beweist Folgendes: die Form (1) ist dann und nur dann beschränkt, wenn es ein $\alpha > 0$ und eine natürliche Zahl p^* derart gibt, daß die Ungleichung $\lambda_{n+1} - \lambda_n < \alpha$ nur für höchstens p^* nacheinanderfolgende Indizes $n = m, m+1, \dots, m+r$ ($r < p^*$) gilt. — Unter Benützung eines anderen Resultates der zitierten Arbeit — $\sup_{\alpha} \sum_{m,n=1}^N \varphi(\lambda_m - \lambda_n) a_m e^{i\lambda_m} \cdot \bar{a}_n e^{-i\lambda_n}$ ist danach die mit der Stepanovschen Norm S_2 äquivalente Norm der Summe $\sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n t}$ — folgt, daß die Summe $\sum_n a_n e^{i\lambda_n t}$ die Fouriersche Reihe einer Funktion $f(t) \in S_2$ ist, wenn $\sum_n |a_n|^2 < \infty$ ist und die Folge $\{\lambda_n\}$ die Bedingung des vorigen Satzes befriedigt. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. Amerio [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. **10**, 191—198 (1941); dies. Zbl. **26**, 317], wo $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \alpha > 0$ vorausgesetzt wird. *B. Sz. Nagy—K. Tandori.*

Uskila, Leo: Über die Existenz der beschränkten automorphen Funktionen. Ark. Mat., Stockholm **1**, 1—11 (1949).

Verf. unterscheidet bei den hyperbolischen Riemannschen Flächen zwei Typen, je nachdem, ob es außer den Konstanten reguläre eindeutige und beschränkte Funktionen gibt oder nicht. Die Einteilung überträgt sich auf die Hauptkreisgruppen. Für den speziellen Fall der symmetrischen Gruppe vom Geschlecht 0 läßt sich die Frage nach dem Typus zurückführen auf die nach der Existenz einer nicht konstanten eindeutigen beschränkten Funktion im Äußeren einer beschränkten abgeschlossenen linearen Punktmenge E , und dafür ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung, daß E von positivem linearem Maße sei. Für die ursprüngliche Frage ergibt sich daraus die Antwort: Notwendig und hinreichend für die Existenz einer nicht konstanten beschränkten automorphen Funktion zu einer symmetrischen Hauptkreisgruppe vom Geschlecht 0 ohne elliptische Substitutionen ist, daß die Summe derjenigen Bogen des Hauptkreises, die dem Fundamentalbereich der Gruppe nicht angehören, kleiner als 2π ist. *Grunsky (Tübingen).*

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Hyers, D. H.: Elementary differential equations. Math. Mag., Texas **23**, 193—204 (1950).

• **Collatz, Lothar:** Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 19.) Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1949. XVII, 466 S., 137 Abb. u. 15 Taf.

Der vorliegende Band ist als eine zweite Auflage des Buches „Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung“ aufzufassen, das 1945 in derselben Sammlung erschien. Der erste Teil bringt typische Beispiele technischer Eigenwertprobleme aus der Mechanik und zwar Ausweichprobleme und Schwingungsaufgaben, wobei unter den erstgenannten die Stabknickung

mit und ohne Eigengewicht, die Knickung des elastisch gebetteten Druckstabes, das Kippen eines auf Biegung beanspruchten Balkens, Torsion und Kippen von Balken mit Doppel-T-Querschnitt, Welle mit Druck und Torsion sowie die Knickung eines Kreisbogens dargestellt sind. An Schwingungsaufgaben sind Schwingungen eines frei herabhängenden Seiles, Torsions- und Biegeschwingungen von Stäben, Stabschwingungen mit Berücksichtigung des Eigengewichtes und kritische Drehzahlen von Wellen mit Kreiselwirkung behandelt. Am Beispiel der Biegeschwingungen eines elastisch gestützten Stabes wird ein Fall mit negativen Eigenwerten vollständig durchgerechnet. — Im zweiten Teil werden die mathematischen Hilfsmittel zur Lösung von Eigenwertproblemen besprochen, wobei zunächst die Grundtatsachen über Eigenwertprobleme mitgeteilt werden. Daran schließt sich eine Erörterung über die Greensche Funktion bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen sowie über deren Beziehungen zu den Integralgleichungen. — Im dritten Teil wird ein kurzer Abriss der mathematischen Theorie gegeben, indem nach Beweis der Minimaleigenschaft des kleinsten sowie der höheren Eigenwerte, der Einschließungs- und Entwicklungssatz formuliert und bewiesen werden. In einer Ergänzung zum dritten Teil wird ein elementarer Beweis der Minimaleigenschaft bei Gleichungen zweiter Ordnung gegeben, ferner die Minimaleigenschaften bei partiellen Differentialgleichungen, zweiparametrische Eigenwertprobleme und Eigenwertkurven besprochen. — Der vierte Teil enthält Verfahren der schrittweisen Näherungen, wobei die Schwarzschen Konstanten und Quotienten eingeführt werden, deren monoton abnehmende Folge bewiesen wird. Nach einer fundamentalen Formel für eine untere und obere Schranke des ersten Eigenwertes wird der Gang der praktischen Durchführung des Verfahrens mit Hilfe der Schwarzschen Konstanten angegeben, dem sich Beispiele der rechnerischen Durchführung anschließen. Die Ergänzung zu diesem Teil enthält das Verfahren der schrittweisen Näherung bei partiellen Differentialgleichungen sowie den Einschließungssatz von Kryloff-Bogoljubow, ferner einen Beweis der oben genannten Fundamentalformel mit Hilfe des Entwicklungssatzes und der Konvergenz des Iterationsverfahrens bei Randwertproblemen. Endlich wird das Verfahren von J. J. Koch für die höheren Eigenwerte bewiesen. — Der fünfte Teil bringt die numerische Verwertung der Minimaleigenschaften, indem drei Minimalprinzipien (Rayleigh, Kamke und Collatz) aufgestellt werden. In jedes von ihnen kann man mit einem „Ritzschen Ansatz“ hineingehen und damit die Gleichungen von Galerkin, Kamke und Grammel erhalten. Die weiteren Ausführungen zum Ritzschen Verfahren befassen sich mit der praktischen, rechnerischen und zeichnerischen Durchführung desselben und außerdem mit solchen technisch wichtigen Fällen, in denen die sonst vom Verf. getroffenen Vereinbarungen nicht sämtlich erfüllt sind, in denen man aber mit Hilfe von Energiebetrachtungen geeignete Ausdrücke der Extremalwerte aufstellen und danach das Ritzsche Verfahren anwenden kann. Bei einigen Beweisen werden einfache Tatsachen aus der Theorie der Matrizen verwendet, die im sechsten Teil ausführlicher behandelt sind, der in gedrängter Form die Analogie der Verfahren und Ergebnisse zwischen den Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen, Integralgleichungen und Matrizen aufzeigen. Dabei werden die Matrizen durchweg im komplexen Gebiet betrachtet, obwohl die Untersuchung bei den meisten Anwendungen in der Physik und Technik auf Matrizen mit reellen Elementen beschränkt bleiben könnte. Da aber gerade in neuerer Zeit auf Gebieten der Mechanik und der Physik (z. B. bei Untersuchungen über die Stabilität linearer Schwingungssysteme mit phasenverschobenen Kräften, in der Quantenmechanik usw.) Matrizen mit komplexen Elementen aufgetreten sind, werden der Darstellung allgemein komplexe Matrizen zugrunde gelegt, abgesehen davon, daß die Darstellung der Matrizen auf diese Weise wesentlich geschlossener erscheint. In den letzten Teilen des Buches folgen einige Verfahren zur angenäherten Ermittlung der Eigenwerte, die sich ziemlich allgemein (d. h. mit nur wenigen Einschränkungen) anwenden lassen, bei denen aber wenig ausgesagt werden kann, ob die erhaltenen Näherungswerte zu groß oder zu klein ausfallen. Diese Verfahren, wie z. B. das Differenzenverfahren, wird man anwenden, wenn man sich mit kurzer Rechenarbeit einen Überblick über die Größenordnung der Eigenwerte verschaffen will oder wenn die in den früheren Kapiteln beschriebenen Verfahren wegen nicht erfüllter Voraussetzungen nicht anwendbar sind. — Am Schluß jedes Kapitels finden sich vermischte Übungsaufgaben mit vollständigen Lösungen, indem die Handhabung der betreffenden Methoden jeweils an den Beispielen erläutert wird. Eine Zusammenstellung der Beispiele ist am Schluß des Buches angefügt, wo in einer Übersicht ebenfalls angegeben ist, welche Methoden in einem vorgelegten Fall anzuwenden sind. — Der Inhalt des Buches ist so reich, daß es in einer Besprechung fast unmöglich erscheint, diesen Reichtum zum Ausdruck zu bringen.

Gran Olsson (Trondheim).

Wakerling, Virginia W.: The relations between solutions of the differential equation of the second order with four regular singular points. Duke math. J. 16, 591—599 (1949).

In this important paper, a Barnes-type contour integral of Heun's equation is found, and from it relations analogous to Riemann's $P^\alpha = \wedge_\beta P^\beta + \alpha_\beta P^{\beta'}$. The constants α_β involve not only Gamma functions but also a function $w(z)$

defined by a difference equation. — The paper contains minor errors. A factor $e^{-\mu s}$ is missing in equation (6) and this affects working as far as equation (10). In the argument just prior to equation (14) a factor π is omitted, but (14) itself is correct. A more serious error occurs in Section II. The statement that $G_1(s)$ leads to a divergent series is incorrect: the series converges but does not satisfy the differential equation. This affects the conclusion that $G(s)$ must be $G_2(s)$. In fact $G(s)$ is of the form $c_1 G_1(s) + c_2 G_2(s)$. Fortunately the argument of Sections III and IV can be saved, provided $\arg a - \pi < \arg(-z) < \pi$ is read instead of $|\arg(-z)| < \pi$ in appropriate places. This is sufficient to establish analytical continuation. *Sawyer*.

Valentine, F. A.: The motion of a sliding horizontal hoop. Amer. math. Monthly 56, 79—87 (1949).

1. Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(A) \quad \frac{du}{dt} = -a \int_0^{2\pi} \frac{u - v \sin \theta}{\sqrt{Q}} d\theta, \quad \frac{dv}{dt} = -a \int_0^{2\pi} \frac{v - u \sin \theta}{\sqrt{Q}} d\theta$$

mit $a > 0$, $Q = u^2 + v^2 - 2uv \sin \theta$ und $(u, v) \neq (\delta, \delta)$, $\delta \geq 0$ [oder auch $(u, v, \theta) = (\delta, \delta, \theta)$ und $\delta > 0$, falls nur im Punkte $(u, v, \theta) = (\delta, \delta, \pi/2)$ die Integranden in (A) gleich Null gesetzt werden]. Dann existiert für jede Lösung $u(t)$, $v(t)$ von (A) mit den Anfangswerten $u(0) = u_0 > 0$, $v(0) = v_0 > 0$ eine Konstante T im Intervall $0 < T \leq (a\pi)^{-1}(u_0^2 + v_0^2)^{\frac{1}{2}}$, so daß $u(t) > 0$, $v(t) > 0$ für $0 \leq t < T$ und $\lim_{t \rightarrow T} u(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow T} v(t) = 0$. — 2. Sind die Funktionen $f_1(u, v, t)$

und $f_2(u, v, t)$ stetig in einem Gebiet $G(u, v, t)$ und ist überdies

$$f_1(u, v_2, t) > f_1(u, v_1, t) \text{ für } v_2 > v_1, \quad f_2(u_2, v, t) > f_2(u_1, v, t) \text{ für } u_2 > u_1$$

in allen Punkten (u, v, t) und (u_1, v_1) , (u_2, v_2) aus G ; sind ferner $u_1(t)$, $v_1(t)$ und $u_2(t)$, $v_2(t)$ für $0 \leq t \leq T$ zwei in G liegende Lösungen des Systems

$$\frac{du}{dt} = f_1(u, v, t), \quad \frac{dv}{dt} = f_2(u, v, t),$$

und haben diese Lösungen keinen gemeinsamen Punkt (u^*, v^*, t^*) für $0 \leq t^* \leq T$, dann gilt:

$$u_2(t) \geq u_1(t), \quad v_2(t) \geq v_1(t) \text{ für } 0 \leq t \leq T, \text{ falls}$$

$$u_2(0) = u_1(0), \quad v_2(0) > v_1(0) \text{ oder } u_2(0) > u_1(0), \quad v_2(0) = v_1(0)$$

als Anfangswerte gewählt werden. — Zu diesen Sätzen wird Verf. anlässlich einer Untersuchung über die gleitende und durch einen horizontalen Stoß eingeleitete Bewegung eines auf einer rauhen Horizontalebene liegenden Reifens (= homogene Massenverteilung längs einer Kreislinie) geführt. Er zeigt, daß der Schwerpunkt S sich geradlinig bewegt, ein anfangs erteilter Drehimpuls Null wird, wenn S zur Ruhe kommt und daher die von S zurückgelegte Wegstrecke um so größer wird, je größer der (reibungsvermindernde) anfängliche Drehimpuls ist. *H. Bilharz* (Freiburg i. Br.).

Wright, E. M.: The linear difference-differential equation with asymptotically constant coefficients. Amer. J. Math. 70, 221—238 (1948).

In der Arbeit wird für die Funktionalgleichung

$$A(y) + \Omega(y) = \begin{cases} v^{(x)} \\ 0 \end{cases}, \quad A(y) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^m a_{\mu v} y^{(v)}(x + b_\mu),$$

$$\Omega(y) = \sum_{v=0}^n \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu v}(x) y^{(v)}(x + b_\mu) \quad b_\mu, a_{\mu v} \text{ Konstante, } \alpha_{\mu v}(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

eine ähnliche Theorie ausgebaut, wie sie für analoge Differentialgleichungen und Differenzgleichungen von Poincaré, Perron und insbesondere von Bochner geschaffen wurde. Sei \mathfrak{M} die Menge (einschließlich ihrer Häufungswerte) der Realteile der Nullstellen von $\sum \sum a_{\mu v} s^v e^{b_\mu s}$, sei ferner jeder Funktion $f(x)$ eine Zahl $\omega\{f\}$

derart zugeordnet, daß

$$\int_{x_0}^{\infty} [f(x)]^2 e^{-\sigma x} dx \text{ für } \sigma > (\text{bzw. } <) \omega\{f\} \text{ konvergiert (divergiert).}$$

Die Hauptergebnisse lassen sich dann so aussprechen: 1. Ist y eine Lösung von $A(y) + \Omega(y) = v(x)$, dann ist $\max_{(v)} \omega\{y^{(v)}\}$ entweder $= \omega\{v\}$ oder $> \omega\{v\}$ und $\subset \mathfrak{M}$. 2. Ist y eine Lösung von $A(y) + \Omega(y) = 0$, dann gilt entweder $\max_{(v)} \omega\{y^{(v)}\} \subset \mathfrak{M}$, oder y ist der 0-Lösung äquivalent. — Die Ergebnisse sind auch in der Theorie der nichtlinearen Funktionalgleichungen anwendbar. *E. Egerváry.*

Myškis, A. D.: Allgemeine Theorie der Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 5 (33), 99—141 (1949) [Russisch].

Verf. nennt Differentialgleichungen mit „abweichenden Argumenten“ Gleichungen von der Form $F(t, y(t_1), y'(t_2) \dots y^{(n)}(t_{n+1})) = 0$, in denen t_1, t_2, \dots, t_{n+1} Funktionen von t sind. Bedeutet t die Zeit und ist $t_1 \leq t, \dots, t_{n+1} \leq t$, so liegen Differentialgleichungen mit „retardierten Argumenten“ vor. Nach einem Überblick über die Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen mit abweichenden Argumenten seit 1750, dem 116 am Schluß der Arbeit nachgewiesene Abhandlungen zugrunde liegen, behandelt er Gleichungssysteme folgender Art

$$(*) \quad y'_i(x) = f_i(x, \dots, y_j(x - \Delta_{jk}(x)), \dots) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, k_j).$$

Alle vorkommenden Funktionen sind reell und stetig und werden später noch weiteren Beschränkungen unterworfen. Die Gleichungen sollen in einem Intervall $A \leq x \leq B$ gelten. Für $x \leq A$ sind die Funktionen y gegeben, für $x > A$ gesucht. Bei $x = A$ ist stetiger Anschluß an die gegebenen Werte gefordert. Die Retardierungsfunktionen $\Delta_{jk}(x)$ nehmen nur positive Werte und den Wert Null an. — Ref. berichtet über die Theoreme (3) (S. 119) und (4) (S. 127), weil sie charakteristisch für die Arbeit sind. Sie sind die schönsten und wichtigsten Resultate und als Fortschritt in der Theorie der Differentialgleichungen zu werten. — Zum Verständnis des Theorems (3) gehe man von der speziellen Gleichung

$$(**) \quad y'(x) = f(x, y(x), y(x-h)) \text{ gültig für } 0 \leq x$$

aus. Für $x \leq 0$ sei $y(x)$ gegeben. $f(u, v, w)$ sei eine reelle, eindeutige, stetige Funktion der reellen Argumente u, v, w . Gesucht ist eine mindestens einmal differenzierbare Funktion $y(x)$, die (**) genügt und sich für $x = 0$ stetig an die gegebene Funktion $y(x)$, $x \leq 0$ anschließt. Zur Fortsetzung der Funktion $y(x)$ aus dem Gebiete bekannter Werte $y(x)$, $x \leq 0$ über 0 hinaus ist in $0 \leq x \leq h$ eine gewöhnliche Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x), y(x-h))$, mit $y(x)$ als gesuchter Funktion zu lösen, danach eine entsprechende Gleichung für $h \leq x \leq 2h$ usw. Nach einem bekannten Satze ist die eindeutige Fortsetzung dann verbürgt, wenn $f(x, u, y(x-h))$ hinsichtlich u in der Umgebung von $u = y(x)$ einer Lipschitzbedingung genügt (hinreichende Bedingung). Hinsichtlich des 3. Argumentes braucht man wegen der von Null verschiedenen Differenz h die Lipschitzbedingung nicht. Wenn aber h eine Funktion von x ist [$h = \Delta(x)$] und für ein Intervall gleich 0 wird, so ist für dieses Intervall $y'(x) = f(x, y(x), y(x))$, und die Lipschitzbedingung bezieht sich jetzt auch auf das 3. Argument von f . Die Punkte $x = x_0$ (mehrere Werte von x_0 zugelassen), für die $\Delta_{kj}(x_0) = 0$ wird (Verf. hebt die Indizes k, j mit $\Delta_{kj}(x_0) = x_0$ durch Zusatz eines weiteren Index l heraus, so daß das Symbol Δ_{kljl} auftritt) sind kritische Punkte des Systems (*). Überschreitet x diese Punkte, so ist mit Verzweigung zu rechnen. Im Beispiel waren die Gleichungen $y' = f(x, y, y(x-h))$ und $y' = f(x, y, y)$ verschiedene Gleichungen mit verschiedenen Gültigkeitsbereichen. Im allgemeinen Falle findet stetiger Übergang statt, und die y_i sollen stetige, eindeutige Funktionen für den Gültigkeitsbereich des Systems (*) sein. Es gelingt Verf. zu zeigen, daß auch im allgemeinen Falle

(*) die Fortsetzung eindeutig ist, wenn die Funktionen f_i hinsichtlich der Argumente $y_j (x - \Delta_{jk}(x))$ mit $\Delta_{jk}(x_0) = 0$ einer Lipschitzbedingung genügen (hinreichende Bedingung). — Die Existenz der Lösung von (*) ohne Rücksicht auf die Eindeutigkeit hat nach Mitteilung des Verf. bereits Tychonow [Bull. Univ. État Moscou, Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 8, 1—25 (1938); dies. Zbl. 21, 235] bewiesen. — Verf. geht nun über diese Verallgemeinerung des bekannten Satzes der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen hinaus, indem er auch für den Fall, daß statt einer Lipschitzbedingung einer Hölderschen Bedingung

$$(***) \quad |f_i(\dots u_l \dots) - f_i(\dots v_l \dots)| \leq \sum_{l=1}^r L_l |u_l - v_l|^{1/\alpha_l}$$

genügt wird, hinreichende Eindeutigkeitsbedingungen aufstellt. In (***) stehen die u_l und v_l dort unter dem Zeichen f_i , wo die $y_{j_l k_l}(x - \Delta_{j_l k_l}(x))$ mit $\Delta_{j_l k_l}(x_0) = 0$ standen. Die u, v bewegen sich in der Nachbarschaft der Werte $y_{j_l}(x_0)$. Die L_l sind Konstante. Die α_l sind jetzt nicht, wie bei der Lipschitzbedingung, alle gleich 1, sondern einige oder alle sind > 1 . Wenn dann beim Überschreiten eines kritischen Wertes x_0 das als positiv vorausgesetzte $\Delta_{jk}(x)$, von $\Delta_{jk}(x_0) = 0$ ausgehend, so schnell wächst, daß positive Konstante b_l so gefunden werden können, daß

$$x - \Delta_{j_l k_l}(x) \leq x_0 + b_l(x - x_0)^{\alpha_l} \text{ für } x_0 \leq x < x + \varepsilon$$

$l = 1, 2, \dots, r$ ist, so ist die Fortsetzung eindeutig. — Weiter beweist Verf. [Theorem (4)], daß die Lösungen des Systems (*) stetig von den Anfangsbedingungen abhängen, genauer, daß gleichmäßige Änderung der gegebenen y_i in $-\infty \leq x \leq A$ und der $\Delta(x)$ um weniger als ε die gesuchten y_i in $A \leq x \leq B$ um weniger als δ ändert, wobei δ mit ε gegen Null strebt. Er beweist diesen Satz nicht nur für das System (*), sondern für entsprechende Gleichungen mit verallgemeinerten Differentialquotienten von nicht im gewöhnlichen Sinne differenzierbaren Funktionen, orientiert am von G. Bouligand (Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932; dies. Zbl. 5, 375) eingeführten verallgemeinerten Tangentenbegriff.

F. Schürer (Berlin).

Myškis, A.: Über die Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen erster Ordnung von instabilem Typus mit retardiertem Argument. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 953—956 (1950) [Russisch].

Gegenstand der Abhandlung ist die Gleichung

$$(*) \quad y'(x) - M(x) y(x - \Delta(x)) = 0,$$

die in $A \leq x < B$ ($B = +\infty$ zugelassen) gilt. — $M(x)$ und $\Delta(x)$ sind nicht negative reelle Funktionen von x . Für $x \leq A$ ist $y(x) = \varphi(x)$ gegeben. — Aus dem Bereich gegebener Werte ist $y(x)$ mit Hilfe von (*) nach rechts stetig fortzusetzen. — Verf. zeigt, daß aus $C_1 e^{\lambda_1 x} \leq \varphi(x) \leq C_2 e^{\lambda_2 x}$ ($x \leq A$) im Bereich bekannter $y(x)$ dieselbe Ungleichung für den Bereich $A \leq x < B$ gesuchter $y(x)$ folgt. λ_1 und λ_2 sind positive Zahlen, die von den Grenzen der Funktionen $\varphi(x)$ und $\Delta(x)$ abhängen. — Dieser Satz ist verwandt dem Theorem 6 auf S. 133 der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. Er zeigt dort, daß die Lösung der Gleichung

$$(2) \quad y_i^{(m)}(x) = \sum_{jkl} a_{jk}^{il}(x) y_j^{(l)}(x - \Delta_{jk}^l(x)) + h_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

die in $A \leq x < B$ gilt, während $y_i^{(l)}(x) = \varphi_i^{(l)}(x)$ für $x \leq A$ gegeben sind, mit nicht negativen Retardierungen $\Delta_{jk}^l(x)$ und beschränkten $a_{jk}^{il}(x)$, $\varphi_i^{(l)}(x)$ und $h_i(x)$ mit ihren Ableitungen unterhalb einer Exponentialfunktion liegt, so daß $|y_i^{(l)}(x)| \leq \delta_j P^l e^{P(x-A)}$ mit positivem P wird. — Verf. beweist diese und verwandte Sätze mit einfachen Abschätzungsmitteln. — Für Stabilitätsuntersuchungen benötigt man Sätze, die u. a. das Verschwinden von $y(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ garantieren. Theoreme dieser Richtung sind bisher nur für spezielle Gleichungen mit verzögertem

Argument gefunden worden. Vgl. dazu etwa I. V. Svirskij, Die Bestimmung der Anzahl der Wurzeln, die in der rechten Halbebene liegen, für Funktionen von der Form $F(e^z, z)$ usw. [Izvestija Kazansk. Fil. Akad. Nauk SSSR 1, 51—61 (1948)], und Ref. (dies. Zbl. 31, 38). Schürer (Berlin).

Titchmarsh, E. C.: Some theorems on perturbation theory. Proc. R. Soc., London, A 200, 34—46 (1949).

Betrachtet wird das Problem $d^2\Phi/dx^2 + \{\lambda - q(x) - \varepsilon \sigma(x)\} \Phi = 0$, $\Phi(0) \cos \alpha + \Phi'(0) \sin \alpha = 0$, $0 \leq \alpha < \infty$, mit stetigen $q(x)$ und $\sigma(x)$. Das ungestörte Problem $\varepsilon = 0$ soll ein orthogonales, normiertes und vollständiges Lösungssystem $\Phi = \psi_n(x)$, $\lambda = \lambda_n$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, besitzen, das gestörte Problem ($\varepsilon \neq 0$) ebenfalls, nämlich $\Phi = \Psi_n(x)$, $\lambda = \Lambda_n$, $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots < \Lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. (Daraus läßt sich beweisen, daß für beide Probleme bei $x = \infty$ der Grenzpunktfall vorliegt, daß es sich also um ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem handelt.

Anm. d. Ref.) Weiter wird $b_n = \int_0^\infty \sigma^2(x) \psi_n^2(x) dx < \infty$ und $\int_0^\infty \psi_n'^2(x) dx < \infty$ für

$n=1, 2, \dots$ gefordert, woraus sich $(\Lambda_n - \lambda_n) \int_0^\infty \Psi_n(x) \psi_n(x) dx = \int_0^\infty \sigma(x) \Psi_n(x) \psi_n(x) dx$

ergibt. Unter weiteren Voraussetzungen der Art $\sigma(x) \geq 0$ oder $\sigma(x) \leq 0$, $|\sigma(x)| \leq M q(x)$, $q(x) \rightarrow \infty$ usw. werden für $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ Sätze der Art

$\Lambda_n = \lambda_n + O(\varepsilon)$, $\Lambda_n = \lambda_n + \varepsilon a_{n,n} + O(\varepsilon^2)$, $a_{m,n} = \int_0^\infty \sigma(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx$,

$\Psi_n(x) = \psi_n(x) + O(\varepsilon)$ hergeleitet. Will man in dieser Richtung weitergehen, so

ergibt sich $\Lambda_n = \lambda_n + \varepsilon a_{n,n} + \varepsilon^2 \sum_{v \neq n} \frac{a_{n,v}^2}{\lambda_n - \lambda_v} + O(\varepsilon^3)$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $\sum_v |a_{n,v} b_v^{1/2} \lambda_v^{-1}| < \infty$ und ähnlich für $\Psi_n(x)$. — Ausdehnung auf zwei

unabhängige Veränderliche. — Die Behauptung $\Lambda_n \geq \lambda_n$ im Falle $\varepsilon > 0$, $\sigma(x) \geq 0$ ist zwar richtig, aber die in § 5 gegebene Begründung ist nicht ausreichend. Rellich.

Wintner, Aurel: On linear repulsive forces. Amer. J. Math. 71, 362—366 (1949).

Verf. beweist: Ist $\mathfrak{F}(t)$ für $0 \leq t < \infty$ eine reelle symmetrische und für jedes feste t semidefinite Matrix stetiger Funktionen, so besitzt das System

$$(*) \quad \ddot{x} - \mathfrak{F}(t) x = 0$$

von $n(>1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung n linear unabhängige Lösungsvektoren $x(t)$ mit

$$r(t) = |x|^2 > 0, \quad \dot{r}(t) \leq 0, \quad \dot{r}(t) \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq t < \infty$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = a < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{r}(t) = 0.$$

Dieser Satz gilt auch dann, falls $\mathfrak{F}(t)$ in (*) durch $\mathfrak{F}(t) + \mathfrak{S}(t)$ ersetzt wird, wobei $\mathfrak{S}(t)$ eine beliebige reelle und für jedes t schiefsymmetrische und stetige Matrix ist. Insbesondere kann daher $\mathfrak{S}(t) = \frac{1}{2}(\mathfrak{F}' - \mathfrak{F})$ angenommen werden, und es genügt bereits, von $\mathfrak{F}(t)$ in (*) an Stelle der Symmetrie und Semidefinitheit nur vorauszusetzen, daß $\mathfrak{F}(t) + \mathfrak{F}'(t)$ semidefinit sei. Die genannte Anzahl linear unabhängiger asymptotischer Lösungen ist maximal, denn es gibt n unter den $2n$ linear unabhängigen Lösungen von (*), für welche $|x(t)| \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ gilt. — Im Falle $n = 1$ ist dieses Ergebnis bereits von A. Kneser [J. reine angew. Math. 116, 178—212 (1896)] gefunden worden.

H. Bilharz (Freiburg i. Br.).

Wintner, Aurel: On the location of continuous spectra. Amer. J. Math. 70, 22—30 (1948).

Sei $f(x)$ eine reelle stetige Funktion auf der Halbgeraden $0 \leq x < \infty$, λ ein reeller Parameter. $f(x)$ und die Differentialgleichung (1) $y'' + (\lambda + f(x)) y = 0$

heißen vom Typ I (Grenzpunktfall), wenn nicht jede Lösung von (1) der Klasse $L^2(0, \infty)$ angehört (wenn für gewisse λ , so notwendig für alle), andernfalls vom Typ II (Grenzkreisfall). Ist $f(x)$ vom Typ I, so definieren (1) und die Randbedingungen (2) $y(0) \cos \theta + y'(0) \sin \theta = 0$, (3) $\int_0^\infty y^2(x) dx < \infty$ im Sinne der

Spektraltheorie des Hilbertschen Raumes ein selbstadjungiertes Eigenwertproblem und somit ein Spektrum S_θ . Innerhalb S_θ unterscheidet man das Punktspektrum P_θ , das kontinuierliche Spektrum C_θ und das Häufungsspektrum D_θ . λ gehört zu S_θ genau dann, wenn (4) $y'' + (\lambda + f(x))y = g(x)$ zusammen mit (2), (3) für gewisse stetige $g(x)$ der Klasse $L^2(0, \infty)$ keine Lösung besitzt. λ gehört dabei zu P_θ , wenn (1), (2), (3) lösbar ist, und D_θ besteht aus den Häufungspunkten von P_θ . Die Punktmenge $C_\theta + D_\theta$, die Ableitung von S_θ , ist von θ unabhängig und wird als das wesentliche Spektrum S' von (1) bezeichnet. [Vgl. H. Weyl, Math. Ann., Berlin 68, 220—269 (1909).] Verf. beweist: (I) Ist (5) $-\infty \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty$

und bleiben bei $\lambda = \lambda_0$ für jede Lösung von (1) $y(x) = O(1)$, $y'(x) = \bar{O}(1)$ ($x \rightarrow \infty$), so gehört $f(x)$ zum Typ I und λ_0 zu S' . (II) Gibt es zu $\lambda = \lambda_0$ zwei linear unabhängige Lösungen von (1), $y_1(x)$ und $y_2(x)$, derart, daß für jedes $g(x)$ der Klasse $L^2(0, \infty)$ auch $g^*(x) = y_1(x) \int_x^\infty y_2(t) g(t) dt + y_2(x) \int_0^x y_1(t) g(t) dt$ der Klasse $L^2(0, \infty)$ angehört [also notwendig auch $y_2(x)$], dann ist, wenn (1) vom Typ I, λ_0 nicht aus S' . — (II) folgt, da, mit einer geeigneten Konstanten a , $y = a g^*(x)$ (4) genügt, in wenigen Zeilen. Zu (I) vgl. nachstehendes Referat. F. W. Schäfke.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the location of spectra of wave equations. Amer. J. Math. 71, 214—217 (1949).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 31, 27) zeigten Verff., daß (vgl. vorsteh. Referat) zu jedem Werte λ , der nicht zu S' gehört, (1) eine Lösung $y \equiv 0$ der Klasse $L^2(0, \infty)$ besitzt. Ferner ist bekannt (P. Hartmann, dies. Zbl. 29, 294; A. Wintner, dies. Zbl. 34, 60), daß, wenn $f(x)$ (5) erfüllt, zu jedem λ für $x \rightarrow \infty$ eine Lösung von (1) (i) nicht von der Klasse $L^2(0, \infty)$ sein kann, ohne $o(1)$ zu sein, (ii) nicht $o(1)$ sein kann, ohne daß die erste Ableitung ebenfalls $o(1)$ ist, (iii) nicht $O(1)$ sein kann, ohne daß auch die erste Ableitung $O(1)$ ist. Hieraus ergeben sich unter Zuhilfenahme der Konstanz der Wronskischen Determinante fast unmittelbar die Sätze: (I) Wenn unter der Bedingung (5) zu $\lambda = \lambda_0$ eine Lösung $y(x) = O(1)$ ($x \rightarrow \infty$) von (1) existiert, so gilt entweder (3) oder λ_0 gehört zu S' . (II) Wenn es unter der Bedingung (5) zu $\lambda = \lambda_0$ zwei linear unabhängige Lösungen von (1) mit $y(x) = O(1)$ ($x \rightarrow \infty$) gibt, dann genügt keine Lösung (3), und λ_0 gehört zu S' . — (II) verbessert Satz (I) der vorstehend besprochenen Arbeit. F. W. Schäfke (Mainz).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the orientation of unilateral spectra. Amer. J. Math. 70, 309—316 (1948).

Statt (1) (vgl. das vorletzte Referat) wird allgemeiner die Differentialgleichung (1') $(p y')' + (\lambda + q)y = 0$ mit stetigen Funktionen $p(x) > 0$ und $q(x) \geq 0$ auf der Halbgeraden $0 \leq x < \infty$ betrachtet. Es wird bewiesen: (I) Ist (1') vom Typ I, so enthält jedes Spektrum S_θ Werte, die sich gegen $+\infty$ häufen. (II) Ist (1') vom Typ I und besitzt für jedes λ jede Lösung unendlich viele Nullstellen, so enthält jedes Spektrum S_θ Werte, die sich gegen $+\infty$ und $-\infty$ hin häufen. Schäfke.

Wallach, Sylvan: On the location of spectra of differential equations. Amer. J. Math. 70, 833—841 (1948).

Es wird (vgl. das erste drei der vorsteh. Referate) bewiesen: (I) Unter der Voraussetzung $\int_0^\infty x f^2(x) dx < \infty$ gelten: (i) (1) ist vom Typ I; (ii) kein positives λ gehört zu P_θ , (iii) jedes nicht-negative λ gehört zu C_θ ; (iv) kein negatives λ gehört zu C_θ ;

(v) D_θ besteht höchstens aus $\lambda = 0$; (vi) P_θ (für festes θ) ist eine beschränkte Menge.
 — (II) Unter der Voraussetzung $\limsup_{x \rightarrow \infty} x |f(x)| = b < \infty$ gelten die Behauptungen (i), (iv), (vi) von (I), sowie: (ii*) kein $\lambda > b^2$ gehört zu P_θ , (iii*) jedes $\lambda \geq b^2$ gehört zu C_θ . — Bekannt war (III) Ist entweder (a) $\int |f(x)| dx < \infty$ oder (b) $\int |df(t)| < \infty$, $f(\infty) = 0$, dann gelten die Behauptungen (i) bis (iv) von (I). — Es wird weiter gezeigt: ($\varepsilon > 0$) (ii) in (I) ist nicht richtig, wenn nur $\int x^{1-\varepsilon} f^2(t) dt < \infty$ gefordert wird. (ii*) in (II) ist nicht richtig, wenn dort b^2 durch $b^2 - \varepsilon$ ersetzt wird. Weder $\int |f(t)|^{1+\varepsilon} dt < \infty$ noch $\int |f'(t)|^{1+\varepsilon} dt < \infty$, $f(\infty) = 0$ sind für (ii) hinreichend.
F. W. Schäfke (Mainz).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Criteria of non-degeneracy for the wave equation. Amer. J. Math. **70**, 295—308 (1948).

(1) — vgl. das erste der vier vorsteh. Referate — ist vom Typ I, d. h. besitzt keine zwei linear unabhängigen Lösungen mit (3), wenn eine der folgenden Bedingungen von $f(x)$ erfüllt wird: (i) $f(x) < \text{const.}$ ($x \rightarrow \infty$) (bekannt). (ii) $f(x_2) - f(x_1) < \text{const.}$ ($x_2 - x_1$) für $\text{const} < x_1 < x_2 < \infty$. (iii) $f(x)$ monoton, $\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^{-1/2} dx = \infty$. (iv) $f(x)$ hat eine Ableitung mit $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f'|/|f|^{3/2} < \infty$, und es ist $\int_{\infty}^{\infty} f(x)|^{-1/2} dx < \infty$.
 — (1) besitzt für $\lambda = 0$ keine Lösung $\equiv 0$ mit (3), ist also erst recht vom Typ I für jedes λ , wenn $f(x)$ eine der folgenden Forderungen erfüllt: (I) $f(x)$ ist positiv, monoton, und es ist $\int_{\infty}^{\infty} f(x)^{-1} dx = \infty$. (II) $f(x)$ ist positiv, monoton, und es gibt eine Folge r_1, r_2, r_3, \dots mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(r_n)/r_n < \infty$, $r_n \rightarrow \infty$. *F. W. Schäfke.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: A criterion for the non-degeneracy of the wave equation. Amer. J. Math. **71**, 206—213 (1949).

(1) — vgl. das erste der fünf vorsteh. Referate — ist vom Typ I, d. h. besitzt keine zwei linear unabhängigen Lösungen mit (3), wenn $f(x)$ die folgende Bedingung erfüllt: (I) für die Anzahl $N(t)$ der Nullstellen einer Lösung $y(x) \equiv 0$ von (1) für $\lambda = 0$ im Intervall $0 \leq x < t$ gilt $\liminf_{t \rightarrow \infty} N(t)/t^2 < \infty$. — Da mit $f_+(x) = \text{Max}(f(x); 0)$ $N(t) = O\left(t \int_0^t f_+(x) dx\right)^{1/2} + O(1)$ gilt, so ist gewiß (II) $\int_0^t f_+(x) dx = O(t^3)$ oder noch schwächer (III) $f_+(t) = O(t^2)$ hinreichend. — Im Anhang wird durch Konstruktion eines Gegenbeispiels die Vermutung widerlegt, daß aus $f(t) \leq g(t)$, wenn $g(t)$ vom Typ I, auch folgen müsse: $f(t)$ vom Typ I. *F. W. Schäfke.*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: The asymptotic arcus variation of solutions of real linear differential equations of second order. Amer. J. Math. **70**, 1—10 (1948).

$\omega(t)$ sei eine positive Funktion auf der Halbachse $0 \leq t < \infty$. Ihre stetige Ableitung erfülle $\omega' = o(\omega^2)$ ($t \rightarrow \infty$). Unter dieser Voraussetzung wird bewiesen: (I) Für die Anzahl $N(s)$ der Nullstellen einer Lösung $x(t) \equiv 0$ von $x'' + \omega^2 x = 0$ im Intervall $0 \leq t \leq s$ hat man $N(s) \sim \pi^{-1} \int_0^s \omega(t) dt$. (II) Für jede Lösung $x(t) \equiv 0$ von $x'' - \omega^2 x = 0$ gilt die Alternative $x'/x \sim \pm \omega(t)$ ($t \rightarrow \infty$). — Die Voraussetzung $\omega' = O(\omega^2)$ ist in beiden Fällen selbst zusammen mit: $\omega \rightarrow \infty$ monoton, nicht hinreichend.
F. W. Schäfke (Mainz).

Hartman, Philip: On a theorem of Milloux. Amer. J. Math. **70**, 395—399 (1948).

H. Milloux [Prace mat. fiz. **41**, 39—54 (1934); dies. Zbl. **9**, 164] bewies: Ist $f(s)$ eine reelle stetige, für große s monotone Funktion mit $f(s) \rightarrow +\infty$ für

$s \rightarrow +\infty$, dann besitzt die Differentialgleichung $\ddot{x} + f(s)x = 0$ mindestens eine Lösung $x(s) \not\equiv 0$ mit $x(s) \rightarrow 0$ für $s \rightarrow \infty$. — Hierfür wird ein einfacher Beweis gegeben auf dem Wege über die beiden Hilfssätze: 1. Ist $A(t)$ eine für $0 \leq t < \infty$ stetige quadratische Matrixfunktion mit der Eigenschaft, daß für jeden Lösungsvektor $z(t)$ von $z'(t) = A(t)z(t)$ der $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)|$ existiert, dann ist notwendig und hinreichend für die Existenz mindestens eines Lösungsvektors $z(t) \not\equiv 0$ mit

$\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = 0$ die Bedingung $\operatorname{Re} \int_0^t \operatorname{Spur} A(s) ds \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow \infty$). 2. Ist $A(t)$ eine für $0 \leq t < \infty$ stetige quadratische Matrixfunktion derart, daß die hermitesche Matrix $A(t) + A^*(t)$ für $0 \leq t < \infty$ nicht-positiv definit ist, dann ist für jede Lösung von $z' = Az$ der Betrag $|z(t)|$ eine nicht wachsende Funktion.

F. W. Schäfke (Mainz).

Wallach, Sylvan: The spectra of periodic potentials. Amer. J. Math. **70**, 842—848 (1948).

$f(t)$ sei eine reelle stetige Funktion der Periode 1. Betrachtet wird die Differentialgleichung (1) $x'' + (\lambda + f(t))x = 0$ mit den Randbedingungen (2) $x(0) = x(n) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). $\varrho(\lambda)$ sei ein gemäß dem Theorem von Floquet zu λ gehöriger charakteristischer Faktor, d. h. es gibt eine Lösung $x(t) \equiv 0$ von (1) mit $x(t+1) \equiv \varrho(\lambda)x(t)$. Es wird u. a. bewiesen: das Spektrum S^n , $\lambda_0^n < \lambda_1^n < \lambda_2^n < \dots$, von (1), (2) hat die folgenden Eigenschaften: (i) Ist $\varrho(\lambda)$ eine komplexe $2n$ -te Einheitswurzel, so gehört λ zu S^n . (ii) $\varrho(\lambda_{m,n-1}^n)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) ist reell. (iii) $\lambda_{m,n-1}^n = \lambda_{m-1}^1$ ($m = 1, 2, 3, \dots$). (iv) $\varrho(\lambda_i^n)$ ist eine komplexe $2n$ -te Einheitswurzel für $i \neq m-1$, $m = 1, 2, 3, \dots$. — Diese Sätze werden in Beziehung gesetzt zu Aussagen über das kontinuierliche Spektrum, das Punktspektrum und das

Häufungsspektrum von (1) mit den Randbedingungen $x(0) = 0$, $\int_0^\infty x^2(t) dt < \infty$ (vgl. das erste der acht vorsteh. Referate). Die Ergebnisse ergänzen und verallgemeinern Resultate von W. Wirtinger [Math. Ann., Berlin **48**, 365—389 (1897)] und E. Hilb [Math. Ann., Berlin **66**, 1—66 (1909)]. F. W. Schäfke (Mainz).

Hartman, Philip: On the linear logarithmico-exponential differential equation of the second order. Amer. J. Math. **70**, 764—779 (1948).

Über das asymptotische Verhalten den Lösungen $x(t)$ von (1) $x'' + f(t)x = 0$ bei $t \rightarrow \infty$ werden für den Fall, daß $f(t)$ eine L -Funktion (logarithmico-exponential) im Sinne von G. H. Hardy [Orders of infinity, Cambridge tracts, no. 12, 2nd ed., (1924), p. 17] ist, Formeln abgeleitet, die über die bisherigen Ergebnisse [vgl. A. Wintner, dies. Zbl. **34**, 59] hinausgehen. Die Beweismethode besteht darin, durch endlich-oftmalige Anwendung der üblichen Liouvilleschen Variablensubstitution (1) auf eine Differentialgleichung mit bekannter Asymptotik zurückzuführen. Schäfke.

Hartman, Philip: A characterization of the spectra of one-dimensional wave equations. Amer. J. Math. **71**, 915—920 (1949).

In dem Eigenwertproblem $(p x')' + (q + \lambda)x = 0$, $0 \leq t < \infty$, $x(0) \cos \alpha + x'(0) \sin \alpha = 0$, Grenzpunktfall bei $t = \infty$, sei über $p(t)$, $q(t)$ nur Stetigkeit und $p > 0$, q reell vorausgesetzt. Es bezeichne $x(t, \lambda) \not\equiv 0$ eine reelle Lösung, die für $t = 0$ der gestellten Randbedingung genügt und $N(T, \lambda)$ sei die Anzahl ihrer Nullstellen in $0 \leq t < T$; schließlich $n = \lim_{T \rightarrow \infty} N(T, \lambda'') - N(T, \lambda')$, $T \rightarrow \infty$, $\lambda'' > \lambda'$. Dann wird u. a. bewiesen: Genau n Punkte des Spektrums liegen in $\lambda' < \lambda < \lambda''$ oder in $\lambda' \leq \lambda < \lambda''$, je nachdem ob die Differentialgleichung für $\lambda = \lambda''$ oszillatorisch oder nicht-oszillatorisch ist. Rellick (Göttingen).

Hartman, Philip and Calvin R. Putnam: The least cluster point of the spectrum of boundary value problems. Amer. J. Math. **70**, 849—855 (1948).

Si considera l'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' + [\lambda - q(x)] y = 0,$$

ove $q(x)$ ($0 \leq x < \infty$) è una funzione continua e λ è un parametro, con la condizione al contorno

$$(2) \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

Per un λ fissato la (1) si chiama oscillatoria o non oscillatoria, secondochè ogni suo integrale (non identicamente nullo) ha o non ha infiniti zeri in $(0, +\infty)$. — È pure noto che la (1) è nelle condizioni del „Grenzpunktfall“ di Weyl se, per qualche λ , possiede un integrale $y = y(x)$ con $\int_0^\infty y^2(x) dx = \infty$. — Nel presente

lavoro viene dato il seguente teorema che completa precedenti risultati [Hartman, questo Zbl. **31**, 306; Hartman-Wintner, Amer. J. Math. **70**, 309—316 (1948), questo Zbl. **35**, 181]: Si definisca μ nel seguente modo: (I) $\mu = \infty$, se per tutti i λ la (1) è non oscillatoria; (II) se la (1) è non oscillatoria per qualche λ , ma non per tutti, μ sia tale che la (1) è oscillatoria per $\lambda > \mu$, e non oscillatoria per $\lambda < \mu$; (III) $\mu = -\infty$, se la (1) è oscillatoria per tutti i λ . Allora: nei casi (I) e (II) l'equazione differenziale (1) è nelle condizioni del „Grenzpunktfall“, e μ è il minimo dell'insieme S' , costituito dai valori di accumulazione dello spettro del problema di valori al contorno (1)–(2); nel caso (III) μ è il minimo valore di S' , allorchè (1) è nelle condizioni del „Grenzpunktfall“. — Da questo teorema gli autori deducono alcune conseguenze tra cui il seguente: Corollario 1. — Sia $q(x)$ continua e limitata per $0 \leq x < \infty$; allora l'equazione differenziale (1) è nelle condizioni del „Grenzpunktfall“, e il minimo μ di S' soddisfa le disuguaglianze $\liminf_{x \rightarrow \infty} q(x) \leq \mu \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} q(x)$. S. Cinquini.

Putnam, C. R.: The cluster spectra of bounded potentials. Amer. J. Math. **71**, 612—620 (1949).

Si considera l'equazione differenziale

$$y'' + [\lambda - q(x)] y = 0,$$

ove $q(x)$ è una funzione continua per $0 \leq x < \infty$ e λ è un parametro e si arreca il seguente complemento al Corollario 1 di Hartman e Putnam (vedi il precedente lavoro): Se $q(x)$ è continua e limitata per $0 \leq x < \infty$, allora ogni intervallo $\mu_1 < \lambda < \mu_2$ contiene almeno un punto di S' , allorchè è $\mu_2 - \mu_1 > \limsup_{x \rightarrow \infty} q(x) - \liminf_{x \rightarrow \infty} q(x)$ e anche $\mu_1 \geq \liminf_{x \rightarrow \infty} q(x)$. S. Cinquini (Pavia).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Eichler, Martin M. E.: On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N(x)u = 0$. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 259—278 (1949).

Verf. behandelt die Gleichung (1) $\Delta u + N(x)u = 0$ in der Ebene nach einem schon bei früherer Gelegenheit benutzten Verfahren [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **15**, 179—210 (1947); dies. Zbl. **30**, 31]. Dabei ist $N(x)$ von der Form

$$N(x) = x^{-2} (c_0 + c_1 x^e + c_2 x^{2e} + \dots) \quad (\varrho > 0).$$

Es wird eine Zuordnung zwischen den Lösungen u von (1) und gewissen analytischen Funktionen $f(z)$ gestiftet vermöge eines Ansatzes

$$u(x, y) = f(z) - \int_{\zeta_0}^z S(x, y; \zeta) f(\zeta) d\zeta \quad (z = x + iy).$$

Wesentlich ist die Bestimmung einer „erzeugenden Funktion“ $S(x, y, \zeta)$, welche ebenfalls der Differentialgleichung genügt. Auf solche Erzeugenden wird man ge-

führt durch den Reihenansatz

$$(2) \quad u = f(z) - p_1(x) \int_{\zeta_0}^z f(z) dz + p_2(x) \int_{\zeta_0}^z \int_{\zeta_0}^z f(\zeta) d\zeta dz - + \dots$$

oder durch einen Reihenansatz

$$u(x, y) = q_0(x) f(z) + q_1(x) df(z)/dz + q_2(x) d^2f(z)/dz^2 + \dots$$

Die aus (2) entspringenden Erzeugenden haben die Form $S(x, y, \zeta) = G(x, z - \zeta)$. Ist speziell für irgendeinen Punkt x_0 $G(x, z + \bar{z} - 2x_0) = 0$ (G heißt dann „kanonisch“), so gilt

$u(x, y) = f(z) - \int_{-z}^z G(x, z - \zeta) f(\zeta) d\zeta$. Man wird speziell zunächst

$f(z) = e^{\lambda z}$ wählen, um dann zum allgemeinen Falle $f(z) = \sum a_\lambda e^{\lambda z}$ überzugehen. Im ersteren Falle trennen sich nämlich die Variablen: $u = h_\lambda(x) e^{i\lambda y}$, wobei die $h_\lambda(x)$ den Bedingungen $h_\lambda'' + (N - \lambda^2) h_\lambda = 0$, $h_\lambda(0) = 1$, $h_\lambda'(0) = \lambda$ genügen, und

zwar ist $h_\lambda(x) = e^{\lambda x} - \int_{-x}^x G(x, x - t) e^{\lambda t} dt$. Im zweiten Falle erhält man als Lösung

$u = \sum_\lambda a_\lambda h_\lambda(x) e^{i\lambda y}$. Genaue Konvergenz- und Fortsetzungsbedingungen werden

angegeben. Beispiele werden durchgerechnet, und der Zusammenhang zwischen verschiedenen Gleichungen (1) $[N(v) = -N - 2 \frac{v_x^2 + v_y^2}{v}]$, v eine partikuläre Lösung von (1)] untersucht. Zum Schluß wird folgende Verallgemeinerung auf $n > 2$ Dimensionen angegeben:

$$\Delta U + N(r^2) U = 0, \quad U = u - \int_0^1 S(r^2, t) u(t, x_1, \dots, t, x_n) dt.$$

An Stelle der Entwicklungsfunktionen $e^{i\lambda y}$ treten jetzt Kugelfunktionen u_m

$$U = \sum P_m(r) u_m r^{-m}, \quad P_m(r) = r^m \left(1 - \int_0^1 S(r^2, t) t^m dt \right).$$

Tautz (Freiburg i. Br.).

Bedini, Lidia: *Integrazione di una particolare equazione a derivate parziali.* Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 176—196 (1948).

Verf. betrachtet das Problem der Integration der Differentialgleichung

$$(1) \quad V^2(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b(t) \frac{\partial y}{\partial t} + c(t) y$$

mit den Randbedingungen $y(0, t) = 0$, $y(l, t) = 0$ und den Anfangsbedingungen $y(x, 0) = f(x)$, $y_t(x, 0) = g(x)$. — Nach Aufstellung einiger Voraussetzungen über die bekannten Elemente des Problems, die vielleicht eine noch genauere Formulierung verdienen würden, konstruiert sie formal die Lösung in klassischer Weise durch Entwicklung in eine Reihe von Elementarlösungen und weist nach, daß die so erhaltene Reihe tatsächlich die Lösung des Problems darstellt. — Ferner wird ein Verfahren zur näherungsweisen Integration von (1) betrachtet und eine Abschätzung des Approximationsfehlers gegeben.

Gaetano Fichera (Roma).

Faedo, Sandro: *Un nuovo metodo per l'integrazione dei problemi di propagazione.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 435—438 (1949).

Verf. bezeichnet als Momentenverfahren das von den Gleichgewichtsaufgaben auf die Ausbreitungsvorgänge übertragene Ritzsche Verfahren: Eine genäherte Lösung wird linear zusammengesetzt aus endlichvielen Gliedern, deren räumliche Faktoren einem vollständigen System angehören und einzeln die Randbedingungen befriedigen, während die Zeitfaktoren aus den Anfangsbedingungen und der Differentialgleichung bestimmt werden, und zwar durch die Forderung, daß der Fehler der Differentialgleichung zu den verwendeten Anfangsgliedern des räumlichen

Systems orthogonal sein solle. Dazu werden Sätze über die Konvergenz, Einzigkeit und Existenz der Lösung ausgesprochen; die Beweise sollen andernorts gegeben werden (dies. Zbl. 33, 275). Bödewadt (Brunoy).

Jacobson, A. W.: Solution of steady state temperature problems with the aid of a generalized Fourier convolution. Quart. appl. Math. 7, 293—302 (1949).

Die erste Randwertaufgabe der Wärmeleitung mit vorgeschriebener stationärer Wärmestromverteilung $F(x, y, z)$ läßt sich, falls man das Grundgebiet auf die Form des Würfels $x, y, z = (0 \dots \pi)$ bringen kann, auf eine ähnliche Aufgabe zurückführen, bei welcher jedoch Wärmestrom und Randwerte von einer der Koordinaten nicht mehr oder nur noch linear abhängen. Der Zusammenhang beider Lösungen entspricht dem Duhamelschen Integral. Das reduzierte Problem kann gemäß den Randbedingungen aufgespalten und mit Hilfe von Lösungen eines Sonderfalles und entsprechender Aufgaben in der Ebene ausgedrückt werden. Die Darstellung der Produkte von Fourierbeizahlen verschiedener Funktionen oder auch der Beizahlen von Fourierdoppelreihen einer Funktion als Faltungsintegrale kommt wiederholt vor, und die beiden Funktionen mit den Sinusbeizahlen $\sin nk: (n \sin n\pi)$ bzw. den Kosinusbeizahlen $\cos nk: (n \sin n\pi)$ werden mehrfach verwendet.

Bödewadt (Brunoy).

Graffi, Dario: Il teorema di unicità nella teoria della propagazione del calore in un mezzo di conduttività variabile con la temperatura. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 143—148 (1948).

Die Eindeutigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} T) = c \rho (\partial T / \partial t)$$

wird für veränderliche Wärmeleitzahlen $K(T)$ unter Einführung der neuen Veränderlichen $\int K dT$ an Stelle von T bewiesen, indem als Randbedingung auf einem Teil der Oberfläche die Anfangstemperatur, an der übrigen Oberfläche der austretende Wärmestrom als Funktion der jeweils sich einstellenden Temperatur gegeben ist. Der stationäre Fall, welcher auf die Eindeutigkeitsfrage der harmonischen Funktionen führt, bleibt außer Betracht.

Bödewadt (Brunoy).

Fichera, Gaetano: Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all' equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 1, 75—100 (1949).

Das gemischte selbstadjungierte Randwertproblem

$$E[u] = \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^m b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c u = f \quad \left(b_h = \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right),$$

$u = \alpha$ auf $F_1 D$, $\partial u / \partial \nu = \beta$ auf $F_2 D$ (D ein Gebiet, dessen Rand FD in zwei punktfremde Teilmengen $F_1 D$, $F_2 D$ zerlegt ist; ν bezeichnet die Richtung der Konormalen) wird in folgender Weise auf eine Integralgleichung erster Art zurückgeführt. Zunächst kann man $\alpha = 0$ annehmen, indem man eine passende Lösung von (1) mit den Randwerten α auf $F_1 D$ substrahiert. Nun ist folgender Hilfssatz leicht beweisbar: Sei D' ein Gebiet, das D enthält und $FD \cdot FD' = F_1 D$. Wenn $\mu(Q)$ so bestimmbar ist, daß das gemischte Potential

$$u(P) = \int_{F_1 D} \left[\mu(Q) \frac{dG(Q, P')}{\partial \nu_Q} \sim \delta(Q) G(Q, P') \right] dQ \sigma [G(Q, P) \text{ Greensche Funktion von } D']$$

im Innern von $D' - D$ verschwindet, so gilt

$$\lim_{P \rightarrow M} u(P) = 0, \quad M \text{ auf } F_1 D; \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = \mu(M) \quad \lim_{P \rightarrow M} \frac{du(P)}{d\gamma_M} = \delta(M), \quad M \text{ auf } F_2 D.$$

Das ursprüngliche Problem ist also gelöst, wenn die Integralgleichung für $\mu: u(P) = 0$ (in $D' - D$) lösbar ist, was in der Arbeit gezeigt wird. Am Schlusse wird

das Verfahren auf elliptische Systeme ausgedehnt, speziell auf das klassische System der Gleichgewichtsgleichungen eines elastischen Körpers. Tautz (Freiburg i. Br.).

Olejník, O. A.: Über das Dirichletsche Problem für Gleichungen von elliptischem Typus. Mat. Sbornik, n. S. 24, 3—14 (1949) [Russisch].

Für die elliptische Differenzialgleichung

$$(1) \quad L(u) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0$$

(a_{ik} dreimal, b_i zweimal, c einmal stetig differenzierbar, $c \leq 0$, die Ableitungen der a_{ik} und b_i Hölder-stetig) beweist Verf., daß die regulären Randpunkte eines beliebigen Gebietes D beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem mit den entsprechenden Punkten für $\Delta u = 0$ identisch sind. Es genügt statt Δu den zum

Operator $L(u)$ gehörigen selbstadjungierten Operator $L'(u) = \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u} \right)$

zu benutzen, in bezug auf welchen der Satz bewiesen ist. Dann kann man z. B. mittels einer verallgemeinerten Lösung der Randwertaufgabe für $L'(u) = 0$, die in einem nichtregulären Randpunkt die Randbedingung verletzt, eine Lösung von $L(u) = 0$ von der gleichen Eigenschaft finden und umgekehrt. Etwas Vorsicht erfordern die Konvergenzbetrachtungen. Bemerkung des Ref.: Der vom Verf. bewiesene Satz ergibt sich auch als unmittelbare Folge aus den allgemeinen Betrachtungen des Ref. über die erste Randwertaufgabe, und zwar unter noch allgemeineren Bedingungen. Vgl. hierzu die Arbeit des Ref. in Math. Nachr., Berlin 2, 279—303 (1949), Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe, Satz 6, S. 297. Tautz.

Conti, Roberto: Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 577—582 (1949).

Soit T la région fermée triangulaire comprise entre l'axe Oy , le segment aux extrémités $O = (0, 0)$, $C_1 = (x_1, y_1)$ et l'hyperbole $xy = x_1 y_1$. Désignons par $T-O$ la région T dont on a enlevé l'origine O . Soit $f(x) > 0$ une fonction continûment dérivable dans $0 \leq x \leq x_1$, telle que $f(x_1) = y_1$ et $x^2 f''(x) - f^2(x) \neq 0$. Supposons que les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ soient continues pour $0 \leq x \leq x_1$ et que $\psi''(x)$ soit continue dans un voisinage à droite de $x = 0$. Dans ces conditions la solution $z(x, y)$ de $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$ pour laquelle $z_x(x, f(x)) = \varphi(x)$ et $z_y(x, f(x)) = \psi(x)$ est régulière dans $T-O$. En général une telle solution ne sera pas régulière dans T . Horváth (Paris).

Schröder, Kurt: Das Problem der eingespannten rechteckigen elastischen Platte. I: Die biharmonische Randwertaufgabe für das Rechteck. Math. Ann., Berlin 121, 247—326 (1949).

Verf. gibt für das Problem des Gleichgewichts und der freien Schwingungen einer rechteckigen Platte erstmalig eine vollständige Lösung. Mathematisch betrachtet handelt es sich um Bestimmung einer Lösung von

$$(1) \quad \Delta \Delta \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = f(x, y) \quad \text{bzw.} \quad \Delta \Delta \varphi = \lambda \varphi$$

bei der Randbedingung (2) $[\varphi]_s = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_s = 0$. Beide Aufgaben lassen sich vermittels der Greenschen Funktion auf die Form bringen: u und v so zu bestimmen, daß (3) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ und $\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$ ist bei den inhomogenen Randbedingungen $[u]_s = h(s)$, $[v]_s = g'(s)$. g und h hängen mit der Greenschen Funktion zusammen. Verf. betrachtet allgemeiner die Randbedingungen (4) $[u]_s = u(s)$, $[v]_s = v(s)$. Dabei seien $u(s)$, $v(s)$ in den inneren Punkten der Rechteckseiten zweimal stetig differenzierbar. Außerdem müssen sie noch der [mit (3) zusammenhängenden] Bedingung (5) $\int_s [u(s) \cos(n, y) - v(s) \cos(n, x)] ds = 0$ genügen. Den 4 Rechteck-

seiten entsprechen 8 Randwertforderungen. Die Aufgabe läßt sich additiv in 8 Teilaufgaben zerlegen, bei denen jeweils die eine Hälfte der Randwerte verschwindet. Nehmen wir als Muster die Aufgabe: (I) $u(x, b/2) = u(x, -b/2) = f(x)$, $v(a/2, y) = v(-a/2, y) = g(y)$ (die anderen Randwerte Null), $f(x)$, $g(x)$ ungerade Funktionen. Fourierreihenansatz für f und g zusammen mit dem Reihenansatz für die unbekannte Funktion

$$\Phi(x, y) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n \sin(n x) \cos(n y) + y \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \beta_m \sin(m y) \cos(m x) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos(n x) \cos(n y) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cos(m y) \cos(m x),$$

wobei $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$ werden soll, führen auf ein unendliches Gleichungssystem, dessen Lösbarkeit Verf. beweist. Außerdem gilt folgender Eindeutigkeitsatz: Ist $(u_0 = \partial\Phi_0/\partial x, v_0 = \partial\Phi_0/\partial y)$ eine spezielle Lösung, die durch

$$\Phi_0 = D \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{x \sin(n x)}{n \cos(n a/2)} - \frac{1 \cos(n x)}{n^2 \cos(n a/2)} - \frac{a \cos(n x)}{2 n \sin(n a/2)} \right\} \cos(n y) \\ + E \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{y \sin(m y)}{m \cos(m b/2)} - \frac{1 \cos(m y)}{m^2 \cos(m b/2)} - \frac{b \cos(m y)}{2 m \sin(m b/2)} \right\} \cos(m x)$$

gegeben wird (im Text ist versehentlich am Summationszeichen $\Sigma v, \mu$ statt n, m gesetzt), wobei

$$D = \frac{4\pi(2F - \pi G)}{b(\pi^2 - 4)}, \quad E = \frac{4\pi(2G - \pi F)}{a(\pi^2 - 4)},$$

so gibt es nur eine Lösung (u, v) des Problems, welche den Abschätzungen

$$\left[\left| \frac{\partial(u - u_0)}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial(v - v_0)}{\partial n} \right| \right]_{S_1} \leq \text{const} \frac{|\log d|}{\sqrt{d}} \\ \oint_{(S_1)} \{ |U - U_0| + |V - V_0| \} ds \leq \frac{\text{const}}{d^\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2} \right)$$

genügt, wo

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{1}{2} \omega - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, y) \\ V = - \left(\frac{1}{2} \omega + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n, x) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n, y)$$

gesetzt ist. Ein entsprechender Eindeigkeitsatz gilt in bezug auf die Lösung der Gesamtaufgabe. An Stelle von $u - u_0$ z. B. tritt ein Ausdruck $u - \sum_{\nu=1}^8 u_0^{(\nu)}$, wo die Summierung sich auf die acht Teilaufgaben bezieht, in welche das Problem zerlegt wurde.

Tautz (Freiburg i. Br.).

Gustin, William: A bilinear integral identity for harmonic functions. Amer. J. Math. 70, 212—220 (1948).

In Umgebungen der Punkte q_1 bzw. q_2 des ν -dimensionalen Raumes ($\nu = 2, 3, \dots$) seien die Funktionen Φ_1 bzw. Φ_2 regulär-harmonisch. Bedeutet x einen Einheitsvektor variabler Richtung, so stellt $\Phi(q_1 + \varrho_1 x)$ $\Phi_2(q_2 + \varrho_2 x)$ das Produkt der Funktionswerte in von q_1, q_2 aus gleichgerichtet gelegenen Punkten auf den Kugeln um q_1, q_2 mit Halbmessern ϱ_1, ϱ_2 dar. Dieses Produkt besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sein über alle Richtungen genommener Mittelwert in der Weise von ϱ_1 und ϱ_2 abhängt, daß er bei festem $\varrho_1 \varrho_2$ konstant bleibt. Für diesen Satz gibt Verf. zwei Beweise. Im ersten stellt er Φ_1 durch ein Poissonintegral dar und stützt sich auf die in dessen Kern enthaltene Symmetrie. Im zweiten wird das Mittelwertintegral bei Festhalten von $\varrho_1 \varrho_2$ in bezug auf einen Parameter differenziert und das Verschwinden der Ableitung mit Hilfe der Greenschen Formel bewiesen. Der Satz erweist sich als bequemer Ausgangspunkt beim Beweis verschiedener Sätze

aus der Theorie der harmonischen Funktionen. Beispielsweise folgt recht unmittelbar, daß eine harmonische Funktion nicht bei Übergang von einer Kugelfläche radial zu einer konzentrischen in allen Richtungen das Zeichen wechseln kann, ohne daß sie identisch verschwindet oder im Innengebiet singulär wird. *G. af Hällström.*

Calderón, A. P.: On the behaviour of harmonic functions at the boundary. Trans. Amer. math. Soc. 68, 47—54 (1950).

Soit u harmonique > 0 dans un demi-espace à $n \geq 2$ dim.; supposons qu'en tout point Q d'un ensemble E de mesure > 0 du plan-frontière Π , il existe un cône de sommet Q limitant avec un plan parallèle à Π un domaine partiel où u est bornée. Alors presque partout sur E , $u(P)$ admet une limite quand P tend non tangentiellement vers un point-frontière. Cela avait été établi dans le plan par Privaloff [Mat. Sbornik 31, 232—235 (1923)]. L'A. démontre même un théorème plus général avec une fonction harmonique respectivement par rapport à plusieurs points dans des demi-espaces à n dim.; il en fait une application aux fonctions de plusieurs variables complexes, généralisant l'application par Plessner [J. reine angew. Math. 158, 219—227 (1927)] du théorème de Privaloff aux fonctions d'une variable complexe. *Brelot (Grenoble).*

Keller, Heinrich: Sur une valeur moyenne de certaines fonctions harmoniques de trois variables. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 887—888 (1949).

Sei G ein in z -Richtung des R_3 ins Unendliche laufendes Gebiet, auf dessen genaue Beschreibung verzichtet sei. Es wird das asymptotische Verhalten einer auf dem Rande von G verschwindenden und im Innern regulären harmonischen Funktion $u(x, y, z)$ untersucht, deren erste Ableitungen noch auf dem Rande stetig sind. Wird $m(z) = \sqrt{\iint_{T_z} u^2 dx dy}$ gesetzt (T_z Schnitt von G mit der Ebene $z = \text{const}$),

so werden mittels Carlemanscher Methoden z. B. folgende Abschätzungen gewonnen (falls G in einem Zylinder vom Querschnitt A liegt): Entweder $m(z) \equiv 0$; oder $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-kz} m(z) > 0$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{-kz} m(z) < \infty$; oder $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^{kz} m(z) < \infty$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{kz} m(z) > 0$; oder $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-kz} m(z) > 0$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{kz} m(z) > 0$ [$k^2 = \alpha^2/A$, $\alpha = 2,404 \dots$ kleinste Nullstelle der Besselschen Funktion $J_0(r)$]. Auch der Fall eines Kegels ist durchgerechnet. *Tautz (Freiburg i. Br.).*

Calderón, A. P.: On a theorem of Marcinkiewicz and Zygmund. Trans. Amer. math. Soc. 68, 55—61 (1950).

Soit $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction harmonique dans le demi-espace $x_n > 0$, telle que pour tout point Q d'un ensemble E de mesure > 0 sur la frontière $x_n = 0$, il existe un cône de sommet Q limitant avec un hyperplan $x_n = C^{\text{te}}$ un domaine partiel où u est bornée. Alors presque partout sur E , il existe un tel domaine où $\int \frac{\text{grad}^2 u}{x_n^{n-2}} dv$ est fini. C'est l'extension d'un théorème établi pour $n = 2$ par Marcinkiewicz et Zygmund [Duke math. J. 4, 473—485 (1938); ce Zbl. 19, 420] grâce à la représentation conforme. *Brelot (Grenoble).*

Laporte, Otto: Polyhedral harmonics. Z. Naturforsch. 3a, 447—456 (1948).

Verf. sucht Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung für Bereiche, die von Ebenen begrenzt sind, welche durch einen Punkt gehen. Die Lösungen oder ihre Normalableitungen sollen auf diesen Ebenen verschwinden, die Ebenen selbst sollen die Symmetrieebenen einer der Gruppen der regulären Körper sein. Ergibt hierzu zwei Verfahren an. Das erste besteht darin, daß er zuerst alle in Betracht kommenden Invarianten der betreffenden Gruppe aufstellt. Übt man auf ein derartiges invariantes Polynom vom Grad n den Laplaceschen Operator aus, so erhält man ein invariantes Polynom vom Grad $n - 2$, weil der Operator selbst ein invarianter Operator ist. Es muß sich als Linearkombination der unabhängigen invarianten

Polynome $(n-2)$ -ten Grades darstellen lassen. So kann man eine Linearkombination der Polynome n -ten Grades finden, welche der Laplaceschen Differentialgleichung genügt, also eine ganze rationale räumliche Kugelfunktion n -ten Grades mit den gewünschten Symmetrieeigenschaften. Das zweite Verfahren besteht darin, in einem invarianten Polynom x, y, z durch $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ zu ersetzen, wodurch man einen invarianten Operator erhält, diesen auf $1/r$ anzuwenden und hiernach mit einer passenden Potenz von r zu multiplizieren. Die ganzen rationalen räumlichen Kugelfunktionen der niedrigsten Grade, die man auf diese Weise erhält, werden angegeben und ihre Eigenschaften kurz beschrieben. *Lense* (München).

Gabriel, R. M.: Some inequalities concerning subharmonic functions. J. London math. Soc. **24**, 154—156 (1949).

Beweis der folgenden Verallgemeinerung einer von Reuter (dies. Zbl. **32**, 282) bewiesenen Ungleichung

$$|U(Q)| \leq 2 \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_C |U(P)| d\omega \right\} \quad (\text{im Raume}); \quad |U(Q)| \leq 2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_C |U(P)| d\varphi \right\} \quad (\text{Ebene});$$

C eine konvexe Fläche bzw. Kurve, $U(Q)$ subharmonisch im Innern von C und auf C . $d\omega$ bzw. $d\varphi$ sind die bekannten Winkel beim Potential der Doppelbelegung. Beim Beweis kann man sich auf den Fall von positivem harmonischem U beschränken. Es handelt sich also dann um die Abschätzung einer positiven harmonischen Funktion durch das Doppelbelegungspotential, dessen Belegung gleich ihren Randwerten ist. *Tautz* (Freiburg i. Br.).

Gabriel, R. M.: An inequality concerning three-dimensional subharmonic functions. J. London math. Soc. **24**, 309—312 (1950).

Verf. beweist folgende Ungleichung:

$$\iint_D U^\lambda(P) dS \leq \iint_K U^\lambda(P) dS \quad (\lambda \geq 2),$$

wo D eine Ebene eines Großkreises einer dreidimensionalen Kugel und K ihre Oberfläche ist. U ist positiv und subharmonisch im Innern und auf der Kugel. Analoges war bisher nur für zwei Dimensionen bekannt. Beweis, — es genügt, $\lambda = 2$ zu betrachten, — mittels Entwicklung von U nach Kugelfunktionen. *Tautz* (Freiburg i. Br.).

Gabriel, R. M.: Some inequalities concerning integrals of two-dimensional and three-dimensional subharmonic functions. J. London math. Soc. **24**, 313—316 (1950).

C sei eine Fläche im Innern der konvexen Fläche Γ des dreidimensionalen Raumes, U subharmonisch in und auf Γ . Dann gilt

$$\iint_C |U(P)|^2 dS \leq A_0(\lambda) \iint_\Gamma |U(Q)|^2 \left(\frac{1}{4\pi} X_Q \right) dS \quad (\lambda > 2),$$

$$A_0(\lambda) = 2^\lambda \left(\frac{\lambda-1}{\lambda-2} \right)^{\lambda-1} \quad \text{für } 2 < \lambda \leq \lambda_0, \quad A_0(\lambda) = A_0(\lambda_0) \quad \text{für } \lambda \geq \lambda_0,$$

wo λ_0 die Stelle des Minimums der Funktion $2^\lambda \left(\frac{\lambda-1}{\lambda-2} \right)^{\lambda-1}$ für $\lambda > 2$ ist; \bar{X}_Q ist der körperliche Winkel, unter welchem die Fläche C von Q aus erscheint. Analoges gilt im Zweidimensionalen. Hier kann man z. B. $|U(P)| = |f(z)|^{\mu/\lambda}$ ($\mu > 0$) setzen. *Tautz* (Freiburg i. Br.).

Verblunsky, S.: Inequalities for the integrals of positive harmonic functions along contours. J. London math. Soc. **24**, 149—153 (1949).

Beweis zweier Ungleichungen für positive harmonische Funktionen in der Ebene. $(1) \int_\Gamma u ds \leq (2 + R/r) \int_C u ds$ (Γ ein Kreis vom Radius R in einem von C berandeten Gebiet). Es wird angenommen, daß durch jeden Punkt von C ein Kreis von festem

Radius r gelegt werden kann, dessen Inneres außerhalb C liegt.

$$(2) \quad \int_{\Gamma} u \, ds \geq \frac{R+d}{2r - (R+d)} \frac{R}{r} \int_C u \, ds.$$

Hier ist r wieder Radius von Kreisen durch die Randpunkte von C , die ganz im Innern von C liegen und Γ enthalten. d ist untere Grenze der Abstände zwischen den Randkreisen und Γ . Der Beweis fußt auf der Darstellung von u mittels Green-scher Funktion.

Tautz (Freiburg i. Br.).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Rosenthal, Jenny E.: The solution of a certain general type of integral equation. Proc. nat. Acad. Sci. USA **36**, 267 (1950).

Kourganoff, Vladimir: Sur les transformées, par les opérateurs A et Φ , des fonctions intégral-exponentielles K_n . C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 958—960 (1948).

Die Kerne der Integralgleichungen $B = A B$; $F = \Phi B$, welche in der Milne-schen Theorie des Strahlungs- und Neutronen-Gleichgewichts der Sterne auftreten,

entstehen aus Funktionen der Folge $K_n(x) = \int_1^{\infty} x^{-n} \exp(-xt) \, dt$. Zu ihrer Lösung mit Iterations- oder Variationsmethoden werden oft Entwicklungen nach den K_n angesetzt. Verf. hat nun diese mit dem Exponentialintegral $Ei(x)$ zusammenhängenden Funktionen nebst ihren Faltungen schon untersucht [Ann. Astrophys. France **10**, 282—299, 329—339 (1947); **11**, 163—164 (1948)]. Die hier benötigten Transformaten λ_n, φ_n der Funktionen K_n lassen sich mit Hilfe der ersten unter den Transzendenten

$$M_n(x), N_n(x) = \int_1^{\infty} t^{-n-1} \exp(-xt) \log(t \pm 1) \, dt$$

sowie der schon von van de Hulst [Astrophys. J., Chicago **107**, 220—246 (1948)]

untersuchten Funktion $K_1^{(2)}(x) = \int_x^{\infty} K_1(t) t^{-1} \, dt$ ausdrücken. Verf. gibt Reihen-entwicklungen für M_0, N_0 und am Schluß eine Tafel der Funktionen $M_0, N_0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ an 16 Stellen ($x = 0 \dots 3$) mit 7 und 8 Dezimalen. **Bödewadt.**

• **Labin, Édouard:** Calcul opérationnel. Abrégé théorique et pratique de mathématiques supérieures. Paris: Masson & Cie. 1949. 149 p. 780 fr.

Das Buch gehört zu den in letzter Zeit immer zahlreicher werdenden Werken, die der Tatsache Rechnung tragen wollen, daß der moderne Physiker und Ingenieur ein erhebliches Quantum von tieferen mathematischen Theorien bei seiner Arbeit braucht, ohne daß er die Zeit hätte, sich die erforderlichen Kenntnisse durch das Studium der nicht nach den Bedürfnissen der Praxis, sondern nach logischen und methodischen Prinzipien aufgebauten einschlägigen mathematischen Werke zu erwerben. Der Verf. stellt folgende Grundsätze auf: Ein Buch für den Ingenieur muß die Mathematik als gebrauchsfertiges Werkzeug liefern, daher muß es nur Resultate, keine Beweise bringen. Die Resultate müssen in der Form dargeboten werden, in der der Ingenieur sie „sucht“, also nicht in der traditionellen dogmatischen Form, sondern möglichst als Antwort auf Fragen, wie sie in der Praxis auftreten. Was an mathematischen Theorien wichtig ist, muß durch eine Art statistischer Untersuchung der heutigen Ingenieur-Veröffentlichungen festgestellt werden. Das Dargebotene darf aber nicht nur aus Formeln bestehen, sondern muß auch Methoden, Gesichtspunkte usw. herausstellen: „des renseignements d'action au lieu d'enseignements de réflexion“. — Als erstes einer Reihe von geplanten Büchern legt der Verf. die Darstellung einer heute für den Ingenieur besonders wichtigen Disziplin vor, der Operatorenrechnung

oder in moderner Ausdrucksweise: der Laplace-Transformation. Als „Leitfaden“ hat er dabei, ohne dies dem Leser zu verraten, offenkundig das Buch des Ref. „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation“ (Berlin 1937; dies. Zbl. 18, 129) genommen, so schon bei der vorausgeschickten Deutung der Transformationsmethode als Übersetzung eines Problems in einen anderen Funktionsbereich (Lösung durch „Umweg“: Hintransformation, Lösung im anderen Bereich, Rücktransformation), dies auch durch dieselbe Figur wie in jenem Werk erläutert; und so bei den folgenden Abschnitten: Abgrenzung der zugelassenen Funktionen, Zusammenhang mit der Fourier-Transformation, grundlegende Abbildungseigenschaften (Abbildung der Differentiation, der Integration, der linearen Substitution usw.), Kritik der Residuenrechnung beim komplexen Umkehrintegral, Abelsche und Taubersche Sätze, asymptotische Darstellungen, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen (letztere, die eigentlich das Hauptanwendungsgebiet darstellen, leider nur sehr kurz behandelt) und Integralgleichungen. An manchen anderen Stellen, so beim komplexen Umkehrintegral, hat auch das Buch von MacLachlan „Complex variable and operational calculus“ (Cambridge 1939; dies. Zbl. 21, 229) Pate gestanden. An Hinzufügungen des Verf. sind zu erwähnen: Die operatorische Behandlung der Diracschen Funktion und ihrer Ableitungen, Rekursions- und Differenzgleichungen und zwei Tabellen von rund 100 korrespondierenden Funktionen, das eine Mal nach den Original-, das andere Mal nach den Bildfunktionen geordnet. [Das Buch des Ref. „Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch“ (Berlin 1947; dies. Zbl. 29, 45) scheint dem Verf. unbekannt geblieben zu sein.] — Merkwürdig ist, daß der Verf. an vielen Stellen, und gerade in den ersten Teilen, die der praktische Benutzer zuerst lesen wird, sehr stark von seinen oben für ein derartiges Buch aufgestellten Prinzipien abweicht. So beschränkt er sich von vornherein vernünftigerweise auf solche Originalfunktionen, die nicht stärker als eine Exponentialfunktion wachsen, verstrickt sich dann aber in langwierige Betrachtungen über einfache, absolute und gleichmäßige Konvergenz, Konvergenzabschneurechnung usw., ohne zu merken, daß das Laplace-Integral bei der obigen Einschränkung immer absolut konvergiert. Außerdem aber ist es für die vom Verf. gemachten Anwendungen völlig gleichgültig, welche Art von Konvergenz vorliegt und insbesondere, welches die genaue Konvergenzhalbene ist. In diesen Fragen hat sich der Verf. anscheinend zu stark von seinem „Leitfaden“ beeindrucken lassen, der als mathematisches Werk die Konvergenzfragen natürlich eingehend behandeln muß. — Als erfreulich für den Benutzer sind die zahlreichen graphischen Funktionsdarstellungen hervorzuheben.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: The inversion of a general class of convolution transforms. Trans. Amer. math. Soc. 66, 135—201 (1949).

Bei dem — vom zweitgenannten Verf. im 14. Bd. des Duke math. J. begonnenen und von den Verff. im 15. Bd. desselben Journals (vgl. dies. Zbl. 32, 26) abgeschlossen — Versuch, bisher behandelte Fälle umfassende Umkehrformeln für Faltungstransformationen zu gewinnen, wird hier eine mittlere — teilweise in diesem Zbl. 30, 393 bereits geschilderte — Stufe erreicht. Es handelt sich nämlich um die Umkehrung

$$A) \text{ von } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) \varphi(t) dt \text{ bzw. } B) \text{ von } f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) e^{ct} dx(t)$$

$$\text{bei } G(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} P_{\infty}(s) ds \text{ mit } P_n(s) = e^{(b-b_n)s} \prod_{k=1}^n (1 - s/a_k) e^{s/a_k},$$

wenn a_k, b, b_n, c reell und $b_{\infty} = 0$ ist. Fall I $a_k \leq 0$ umfaßt die Laplacesche, II $a_k > 0, \sum a_k^{-1} = \infty$ die iterierte Laplacesche, d. h. Stieltjessche Umwandlung, III $a_k > 0, \sum a_k^{-1} < \infty$ ist ausgeartet und umfaßt kein bekanntes Beispiel. — Verff.

zeigen nun, daß bei A) $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(d/dx) f(x)$ wird in jenen Stetigkeitspunkten von φ , welche (im III. Fall geeignete) Konvergenzpunkte des ursprünglichen Integrals sind. Bei B) gilt in entsprechenden Konvergenzpunkten und den Stetigkeitspunkten von α : $\alpha(x_2) - \alpha(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} e^{-cx} P_n(d/dx) f(x) dx$. Falls $c \geq \min(a_k > 0)$ bzw. $\leq \max(a_k < 0)$ ist, muß hier allerdings $x_2 = +\infty$ bzw. $x_1 = -\infty$ gesetzt werden. — Zum Schluß wird einerseits die Stetigkeitsbedingung bezüglich φ und α gelockert, andererseits der Fall behandelt, in welchem $P_\infty(s)$ eine Nullstelle in $s = 0$ besitzt und dementsprechend in $G(t)$ das Linienintegral entlang einer der imaginären Achse parallelen und die Nullstellen von $P_\infty(s)$ vermeidenden Geraden erstreckt wird.

Szentmártony (Budapest).

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: A representation theory for a general class of convolution transforms. Trans Amer. math. Soc. **67**, 69—97 (1949).

Für die Darstellbarkeit einer Funktion $f(x)$ als Laplacesche bzw. iterierte Laplacesche, d. h. Stieltjessche Transformierte einer nichtabnehmenden Belegungsfunktion $\beta(t)$ fand 1928 S. Bernstein bzw. 1937 der zweitgenannte Verf. $(-1)^k f^{(k)}(x)$ bzw. $(-1)^{k-1} [x^k f(x)]^{(2k-1)} \geq 0$ als notwendige und hinreichende Bedingung bei $k = 0, 1, 2, \dots$ bzw. $1, 2, \dots$. Diese und ähnliche, von Boas jr. und Akutowicz erhaltenen Sätze weit umfassend, geben nun Verff. notwendige und

hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit A) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) e^{ct} \varphi(t) dt$

bzw. B) $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t) e^{ct} d\beta(t)$ bei $G(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} / P_\infty(s) ds$ mit

$P_n(s) = e^{(b-b_n)s} \prod_{k=1}^n (1 - s/a_k) e^{s/a_k}$ und reellen c, a_k, b, b_n sowie $b_\infty = 0$ an. Es

zeigt sich dabei, daß die Fälle I. $a_k \geq 0$, II. $a_k > 0, \Sigma a_k^{-1} = \infty$, III. $a_k > 0, \Sigma a_k^{-1} < \infty$ unterschieden werden müssen. Für A) ergeben sich so bei $\varphi(t) \in L_p$ mit $p > 1$

die Bedingungen $f(x) \in C^\infty$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-cx} P_n(d/dx) f(x)|^p dx \leq M$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

in allen Fällen bei $c < \lambda_2 = \min[a_k > 0, +\infty]$ und im Falle I. noch bei $c > \lambda_1 = \max[a_k < 0, -\infty]$. Bei beschränktem $\varphi(t)$ werden die Integralbedingungen durch $\sup_{-\infty < x < \infty} |e^{-cx} P_n(d/dx) f(x)| \leq M$ ersetzt. Für B) ist dagegen bei einem

$\beta(t)$ mit beschränkter totaler Variation innerhalb $-\infty < t < \infty$ in den Integralbedingungen $p = 1$ zu setzen. Wird aber $\beta(t)$ nur als nichtabnehmend vorausgesetzt, so ergeben sich für B) die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

1) $f(x) \in C^\infty$ für $-\infty < x < \infty$ im I. und II., für $T + b + \Sigma a_k^{-1} < x < \infty$, wenn $\beta(t)$ nur für $t > T$ definiert ist, im III. Fall. 2) $f(x) = o(e^{\lambda_2 x})$ für $x \rightarrow +\infty$ in allen Fällen, $f(x) = o(e^{\lambda_1 x})$ für $x \rightarrow -\infty$ im III. Fall. 3) $P_n(d/dx) f(x) \geq 0$

im I. und $\prod_{k=1}^n (1 - a_k^{-1} d/dx) f(x) \geq 0$ im II. und III. Fall bei $n = 0, 1, \dots$

Szentmártony (Budapest).

Jacobson, A. W.: A generalized convolution for finite Fourier transformations. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 804—809 (1949).

Die verallgemeinerte Faltung von $F(x)$ im endlichen Intervall $(-\pi, \pi)$ wird definiert durch

$$F^*(x) = - \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x-y, y) dy,$$

wo $F_1(x, y)$ eine hinsichtlich x und y ungerade periodische Fortsetzung von $F(x, y)$ ist. Im Falle $F(x, y) = F(x) G(y)$ ist F^* die übliche Faltung von F und G . Für F^*

gilt der folgende Faltungssatz: Die endliche Sinus- und Cosinus-Transformation seien definiert durch

$$S\{F(x)\} = \int_0^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = f_s(n), \quad C\{F(x)\} = \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = f_c(n).$$

Dann ist $S\{S\{F(x, y)\}\} = 2^{-1} C\{F^*(x)\}$. — Dies wird zur Lösung von Randwertproblemen in folgender Weise ausgenutzt: Für die stationäre Temperaturverteilung $V(x, y_1, y_2)$ in einem zur x -Achse parallelen Zylinder wird ein ziemlich allgemeines Randwertproblem gestellt, das durch die Sinus-Transformation hinsichtlich x in ein Problem für die entsprechende Funktion $v(n, y_1, y_2)$ übersetzt wird. Daneben wird ein zweites Problem für eine Funktion $U(x, x', y_1, y_2)$ betrachtet und durch doppelte Sinus-Transformation (mit demselben n) in ein Problem für die entsprechende Funktion $u(n, y_1, y_2)$ übersetzt. Die Probleme für v und u erweisen sich als äquivalent bis auf einen Faktor n , so daß $v(n, y_1, y_2) = n u(n, y_1, y_2)$ ist. Da u die iterierte Sinus-Transformation von U ist, läßt es sich nach dem obigen Faltungssatz durch die Cosinus-Transformation der verallgemeinerten Faltung U^* von U ausdrücken: $u(n, y_1, y_2) = 2^{-1} C\{U^*(x, y_1, y_2)\}$. Daher ist $v(n, y_1, y_2) = 2^{-1} n C\{U^*(x, y_1, y_2)\} = -2^{-1} S\{\partial U^*(x, y_1, y_2)/\partial x\}$. Da andererseits $v = S\{V\}$ ist, so folgt:

$$V(x, y_1, y_2) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} U^*(x, y_1, y_2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\pi}^{\pi} U_1(x - x', x', y_1, y_2) \, dx',$$

wo U_1 die ungerade Fortsetzung von U hinsichtlich x und x' ist. Diese Formel kann als eine Ausdehnung der Duhamelschen Formel von der Zeit auf die räumlichen Koordinaten angesehen werden.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Ivanov, A. V.: Eine Verallgemeinerung der Formel der Operatorardarstellung des Produktes zweier Funktionen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 663—664 (1949) [Russisch].

Die mit der Parsevalschen Formel äquivalente Tatsache, daß unter gewissen Voraussetzungen die Laplace-Transformation des Produktes zweier Funktionen gleich der „komplexen Faltung“ der Laplace-Transformierten der Faktoren ist [was lange bekannt ist, hier aber G. A. Grinberg, C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 40, 141—143 (1943) zugeschrieben wird], verallgemeinert der Verf. unter nicht präzisierten Voraussetzungen dahin, daß aus den Laplace-Transformierten von $\varphi(t)$ und $e^{q(t)w} u(t)$ diejenige von $\varphi(q(t)) u(t)$ hergestellt wird. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Bose, S. K.: On Laplace transform of two variables. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 173—178 (1949).

Der Verf. stellt eine Reihe von Formeln für die doppelte L -Transformation zusammen, die sich direkt aus ihrer Definition bei geeigneten Voraussetzungen betr. Konvergenz der Integrale ergeben. Beispiele: 1. Wenn

$$\varphi_1(p, q) \doteq h_1(x, y) \quad \text{und} \quad \varphi_2(p, q) \doteq h_2(x, y)$$

dann gilt

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_1(u, v) h_2(u, v) \frac{du}{u} \frac{dv}{v} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(t, s) \varphi_2(t, s) \frac{dt}{t} \frac{ds}{s}.$$

2. Wenn $f(p, q) \doteq h(x, y)$, so gilt

$$\frac{f(\log p, \log q)}{\log p \log q} \doteq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^s y^t h(s, t)}{\Gamma(s+1) \Gamma(t+1)} \, ds \, dt.$$

Saxer (Zürich).

Edrei, Albert: Sur les formules d'inversion pour les transformées de Stieltjes et certains théorèmes taubériens. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 395—408 (1949).

In dieser Arbeit gibt der Verf. die Beweise zu den in seiner Note C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1365—1367 (1948); dies. Zbl. **34**, 212 angegebenen Sätzen über Umkehrformeln und Taubersche Theoreme für die Stieltjes-Transformation.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Hamburger, Hans Ludwig: Remarks on the Dirac δ -operator. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 489—494 (1949).

Bewiesen wird die Unmöglichkeit, eine Funktion $I(s, t)$ zu finden, mit der
$$\int_0^1 I(s, t) f(t) dt = f(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$
 gilt gleichzeitig für alle $f(t)$ einer linearen Mannigfaltigkeit von Funktionen, die jedenfalls die Potenzen $1, t, t^2, \dots$ enthält. Erweiterungen auf die Grundgebiete $0 \leq s < \infty$ und $-\infty < s < +\infty$. *Rellich*.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Šilov, G. E.: Ringe vom Typus C . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 813—816 (1949) [Russisch].

Soit R une algèbre normée régulière au sens de l'A. (ce Zbl. **33**, 281); pour un $x \in R$ et un point s de l'espace \hat{R} des idéaux maximaux de R , on note $\|x\|_s$ la borne inférieure des nombres $\|y\|$ lorsque y parcourt l'ensemble des éléments de R pour lesquels la fonction $y(t)$ (définie sur \hat{R}) coïncide avec $x(t)$ au voisinage de s ; on dit que R est du type C si l'on a $\|x\| = \sup_{s \in \hat{R}} \|x\|_s$ pour tout $x \in R$. L'A.

commence par donner (suivant I. Gelfand) une définition de ce qu'il appelle une somme directe continue d'anneaux primaires, puis démontre ceci: si R est un anneau du type C , et si l'on désigne, pour chaque $s \in \hat{R}$, par $J(s)$ le plus petit idéal primaire fermé de R contenu dans l'idéal maximal associé à s , alors R est la somme directe continue des anneaux primaires $R/J(s)$ (sous réserve que R soit sans radical), la réciproque étant du reste vraie (si une somme directe est un anneau régulier sans radical, cet anneau est du type C). Le reste de cette Note est surtout consacré à donner des conditions assurant qu'une somme directe (continue) d'anneaux primaires est sans radical, ou est régulière (ce qui, suivant l'A., fait intervenir des méthodes analogues à celles de la théorie des fonctions quasi-analytiques). *R. Godement*.

Chailov, E. I.: Lineare singuläre Gleichungen in normierten Ringen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **58**, 1613—1616 (1947) [Russisch].

R sei ein kommutativer normierter Ring mit Einselement, in dem ein skalares Produkt mit den üblichen Eigenschaften erklärt ist. Ein distributiver Operator S auf R heißt singulär, wenn für jeden Operator T , von dem eine Iteration vollstetig ist, stets eine Iteration von ST und TS vollstetig ist, wenn ferner für jedes $f \in R$ eine Iteration von $Sf - fS$ vollstetig ist, wenn $S^2 = E$ ist und schließlich der adjungierte Operator S' dieselben Bedingungen erfüllt. Es wird die Gleichung $K(f) = \varphi f + \psi S(f) + T(f) = g$ auf ihre Lösbarkeit bei gegebenen φ, ψ, g, T (wie oben) untersucht. Es wird vorausgesetzt, daß $\varphi + \psi$ und $\varphi - \psi$ in R inverse Elemente haben. Ist K_1 ein Operator mit demselben S , so ist auch KK_1 und K_1K vom selben Typ, ebenso der adjungierte Operator K' . Es wird bewiesen, daß $K(f) = 0$ stets endlich viele linear unabhängige Lösungen besitzt und daß die inhomogene Gleichung $K(f) = g$ dann und nur dann lösbar ist, wenn g orthogonal zu den Lösungen von $K'(f) = 0$. Ferner gilt, daß die Differenz der Zahl der Lösungen von $K(f) = 0$ und $K'(f) = 0$ nur vom charakteristischen Teil $\varphi + \psi S$ abhängt. Diese Sätze sind Verallgemeinerungen von Resultaten von F. Noether [Math. Ann. Berlin **82**, 42—63 (1921)]. *G. Köthe* (Mainz).

Grinbljum, M. M.: Über die Darstellung eines Raumes vom Typus B als direkte Summe von Unterräumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 749—752 (1950) [Russisch].

Soient X et Y deux sous-espaces fermés d'un espace de Banach E , dont l'intersection est nulle, $E_0 = X + Y$ leur somme directe algébrique, S_X et S_Y les sphères unité de X et Y , P (resp. Q) l'ensemble des formes linéaires continues sur E qui sont nulles sur Y (resp. X). L'A. donne d'abord des conditions pour que E_0 , étant supposé partout dense dans E , soit identique à E ; la première est que la distance de S_X à S_Y soit > 0 ; une autre condition équivalente est que toute forme linéaire continue sur X soit la restriction à X d'un élément de P ; par ailleurs, si $E = X + Y$ on a $E^* = P + Q$ où E^* désigne le dual de E (le rapporteur serait fort étonné que ces résultats fussent nouveaux). Dans la seconde partie, l'A. étudie les sommes directes infinies. Soit (P_n) une suite de sous-espaces fermés de E ; on désigne par P le sous-espace fermé engendré par les P_n ; étant donnée une suite partielle d'indices n_m ($n_m < n_{m+1}$) on note $P_{n_1} \dots P_{n_m} \dots$ le sous-espace fermé engendré par les P_{n_m} , et $P_{n_1} \dots P_{n_m} \dots$ le sous-espace fermé engendré par les autres P_i ; enfin, soit Π l'ensemble des $x \in P$ de la forme $\sum x_i$ où $x_i \in P_i$; si la représentation $\sum x_i$ de tout $x \in \Pi$ est unique, on dira que Π est la somme directe des P_i . L'A. donne alors la condition suivante pour que P soit somme directe des P_i : il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout n , la distance de la sphère unité de $P_{12 \dots n}$ à $P^{12 \dots n}$ soit $\geq \alpha$. Maintenant, disons que les P_n vérifient la condition (β) si, quels que soient n_1, \dots, n_p , la distance de la sphère unité de $P_{n_1} \dots P_{n_p}$ à $P^{n_1 \dots n_p}$ est $\geq \beta$; d'après ce qui précède, tout $z \in P$ a alors une représentation unique $z = \sum z_i$ avec $z_i \in P_i$; ceci étant, pour que (P_n) vérifie une condition (β) , il faut et il suffit que, pour tout $z \in P$ et toute forme linéaire continue $f \in E^*$ la série $\sum f(z_i)$ soit absolument convergente. R. Godement.

Abdelhay, José: Caractérisation de l'espace de Banach de toutes les suites de nombres réels tendant vers zéro. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1111—1112 (1949).

Besitzt ein Banachraum E eine Basis w_i , $i = 1, 2, \dots$, mit $\|w_i\| = 1$ und $\|w_1 + \dots + w_p\| \leq K < \infty$ unabhängig von p und gilt für die durch $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) w_i$ eingeführten Koordinatenfunktionen $f_i(x)$, daß aus $|f_i(x)| \geq |f_i(y)|$ stets $\|x\| \geq \|y\|$ folgt und daß zu jedem $y \in E$ ein $x \in E$ existiert mit $f_i(x) \geq \max[0, f_i(y)]$ für alle i , so ist E äquivalent (c_0) . Dieses und ein ähnliches Resultat werden ohne Beweis mitgeteilt. G. Köthe (Mainz).

Schäffke, Friedrich Wilhelm: Über einige unendliche lineare Gleichungssysteme. Math. Nachr., Berlin **3**, 40—58 (1950).

Ein Biorthogonalsystem f_ν, g_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} heiße beschränkt, wenn sowohl f_ν als auch g_ν eine Basis des Raumes darstellt und die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_\nu f_\nu$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_\nu g_\nu$ genau dann konvergieren, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\zeta_\nu|^2$ konvergiert. Eine Basis f_ν von \mathfrak{H} heiße beschränkt, wenn sie sich durch ihre adjungierte Folge zu einem beschränkten Biorthogonalsystem ergänzen läßt. Verf. zeigt: 1. Bilden die Elemente h_ν eine beschränkte Basis und ist f_ν eine Folge derart, daß für alle endlichen Linearkombinationen mit denselben Koeffizienten, $h = \sum \alpha_\nu h_\nu$ und $f = \sum \alpha_\nu f_\nu$ immer $\|h - f\| \leq \lambda \|h\|$ mit festem $\lambda < 1$ erfüllt ist, so ist auch f_ν eine beschränkte Basis, und umgekehrt. Dies ist eine Verallgemeinerung des Paley-Wienerschen Vollstndigkeitskriteriums [Paley und Wiener, Fourier transforms in the complex domain, New York 1934, S. 100; dies. Zbl. **11**, 16. Vgl. auch B. Sz.-Nagy, dies. Zbl. **29**, 144]. 2. Ist h_ν ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem (v. n. O.), so bildet f_ν, g_ν genau dann ein beschränktes Biorthogonalsystem, wenn die Matrix $((f_\nu, h_\mu))$ beschränkt ist und die beschränkte Reziproke $((h_\nu, g_\mu))$ besitzt. 3. Es sei h_ν ein v. n. O. und für alle $a \in \mathfrak{H}$ gelte mit festem $\lambda < 1$ $\sum_{\nu=1}^{\infty} |(a, f_\nu - h_\nu)|^2 \leq \lambda \|a\|^2$, dann bildet f_ν eine beschränkte Basis von \mathfrak{H} . Dies umfaßt ein Kriterium von Hilding (dies. Zbl. **30**, 396). — Aus diesen Resultaten

folgt der Verf., daß die Funktionenfolgen $\cos(\nu + \delta)\xi$ ($-\frac{1}{4} < \delta < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} < \delta < \frac{3}{4}$) und $\sin(\nu + \delta)\xi$ ($\frac{1}{4} < \delta < \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < \delta < \frac{5}{4}$) ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) je eine beschränkte Basis von $\mathfrak{L}^2(0, \pi)$ bilden. Die Folgen $\cos(2\rho + \delta)\xi$ und $\sin(2\rho + \delta)\xi$ ($\rho = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) stellen für alle nicht ganzen δ je eine beschränkte Basis von $\mathfrak{L}^2(0, \pi)$ dar. Andererseits beweist Verf., daß die multiplikative Gruppe der Funktionen $e^{i\delta\xi}$ isomorph mit der multiplikativen Gruppe der beschränkten Matrizen $\mathfrak{M}^\delta = \left(\frac{(-1)^{\nu-\mu} \sin \pi \delta}{\pi(\nu - \mu + \delta)} \right)$ ($\nu, \mu = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) ist und daß die Matrix $\mathfrak{Z}(\delta) = \left(\frac{(-1)^{\nu-\mu} \sin \pi \delta}{\pi(\nu - \mu + \delta)} \right)$ ($\nu, \mu = 0, 1, 2, \dots$) (die für alle komplexen δ beschränkt ist) für $-\frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{2}$ eine beschränkte Reziproke besitzt. — Als Anwendung untersucht Verf. das unendliche lineare Gleichungssystem

$$(S) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} \tau_{\mu} \int_0^{\beta} \varepsilon_{\mu} \cos \mu \pi \xi \left(\cos \frac{\nu \pi}{\beta} \xi - \cos \frac{(\nu+2)\pi}{\beta} \xi \right) d\xi = \beta \delta_{0\nu}$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} \int_{\beta}^1 \varepsilon_{\mu} \cos \mu \pi \xi \cos \nu \pi \xi d\xi = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

mit $0 < \beta < 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{\nu} = \sqrt{2}$ ($\nu \geq 1$), wo $|\tau_{\nu}|$ über und $|\tau_{\nu}|/(\nu+1)$ unter einer festen positiven Schranke liegen, $\Re \tau_{\nu}$ und $\Im \tau_{\nu}$ alle entweder nicht negativ oder nicht positiv sind. Es wird bewiesen, daß (S) mindestens eine Lösung ξ_{μ} mit $\sum_{\mu=0}^{\infty} |\xi_{\mu}|^2 < \infty$ besitzt und daß (S) nicht zwei verschiedene Lösungen ξ_{μ} , ξ'_{μ} mit $\sum_{\mu=0}^{\infty} |\tau_{\mu} (\xi_{\mu} - \xi'_{\mu})|^2 < \infty$ besitzt. (S) wurde von Magnus und Oberhettinger bei Untersuchung eines physikalischen Problems erhalten. Horváth (Paris).

Schäffke, Friedrich Wilhelm: Das Paley-Wienersche Kriterium im Banachschen Raum. Math. Nachr., Berlin 3, 59—61 (1950).

Es sei \mathfrak{B} ein komplexer Banachscher Raum und \mathfrak{B} sein dualer Raum. Ein Biorthogonalsystem $h_{\nu} \in \mathfrak{B}$, $h_{\nu} \in \mathfrak{B}$, $\langle h_{\nu}, h_{\nu} \rangle = \delta_{\mu\nu}$ heiße ein Basisbiorthogonalsystem, wenn h_{ν} eine Basis von \mathfrak{B} , h_{ν} eine Basis von \mathfrak{B} ist. Es sei h_{ν} , h_{ν} ein Basisbiorthogonalsystem und $f_{\nu} \in \mathfrak{B}$ eine Folge derart, daß für alle endlichen Linearkombinationen mit denselben Koeffizienten $h = \sum \alpha_{\nu} h_{\nu}$ und $f = \sum \alpha_{\nu} f_{\nu}$ immer $\|h - f\| \leq \lambda \|h\|$ mit festem $\lambda < 1$ erfüllt sei. Dann ist f_{ν} zusammen mit seiner adjungierten Folge f_{ν} auch ein Basisbiorthogonalsystem; die Reihen $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_{\nu} h_{\nu}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_{\nu} f_{\nu}$ konvergieren oder divergieren gleichzeitig, ebenso $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_{\nu} h_{\nu}$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_{\nu} f_{\nu}$. Für $\lambda < \frac{1}{2}$ gilt auch die Umkehrung. Dies ist die Übertragung des Paley-Wienschens Vollständigkeitskriteriums (vgl. vorsteh. Referat) auf Banachsche Räume. Horváth.

Wiegmann, N. A.: A note on infinite normal matrices. Duke math. J. 16, 535—538 (1949).

Die folgenden Sätze des Verf. über endliche Matrizen (dies. Zbl. 31, 243) gelten auch für unendliche vollstetige Matrizen: 1. Sind A und B normal, so ist AB genau dann normal, wenn A mit BB^* vertauschbar ist und B mit AA^* ; es ist dann auch BA normal. 2. Enthält eine Menge von normalen Matrizen neben je zwei auch deren Produkt, so lassen sich die Matrizen simultan unitär zerfallen, derart, daß die Teilmatrizen endlich und bis auf einen Zahlenfaktor unitär sind. Wielandt.

Stečkin, S. B.: Über Bilinearformen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 237—240 (1950) [Russisch].

Es werden Bilinearformen von der Art

$$T = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{m-n} x_m y_n \quad \text{mit} \quad c_k = \int_0^1 f(t) \exp(-2\pi i k t) dt$$

betrachtet. Satz 1: Ist $f(t) \in L^r$ mit $r > 1$, sind ferner $1 < p \leq 2$, $1 < q \leq 2$ und $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, so ist T im Raume $l^p \times l^q$ beschränkt und hat die Schranke $\|T\|_{p,q} \leq \|f\|_r$. — Satz 2. Ist $f(t)$ von beschränkter Schwankung, so ist T beschränkt in jedem Raume $l^p \times l^{p'}$ ($p > 1$, $p' = p/(p-1)$). — Satz 1 wird mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung und des Hausdorff-Youngschen Satzes sehr einfach abgeleitet. Zum Beweis von Satz 2 wird u. a. die Beschränktheit der Hilbertschen Form $\sum_{m \neq n} x_m x_n / (m-n)$ im Raume $l^p \times l^{p'}$ benutzt. Im Falle $r = \infty$,

$p = q = 2$, wurde der Satz 1 schon durch Toeplitz gefunden (vgl. z. B. Hardy-Littlewood-Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934, theorem 303; dies. Zbl. 10, 107). — Die Ergebnisse werden auch in der Sprache der linearen Transformationen ausgesprochen.

Béla Sz. Nagy (Szeged).

Hartman, Philip and Aurel Wintner: Separation theorems for bounded Hermitian forms. Amer. J. Math. 71, 865—878 (1949).

In Verallgemeinerung von Trennungssätzen für endliche bzw. vollstetige Matrizen wird zunächst bewiesen: Es sei H eine beschränkte Hermitesche Matrix und e ein festes Element der Länge 1 des zugrunde gelegten Hilbertschen Raumes. Es sei E die Matrix, welche jedes x in den durch e aufgespannten Raum projiziert, also $E x = (e, x) e$, und I die Einheitsmatrix. Es werde ${}^0H = (1 - E) H (1 - E)$ gesetzt [die Form $(x, {}^0H x)$ entsteht also aus der Form $(x, H x)$ durch Projektion jedes x auf den zu e orthogonalen Teilraum]. Sei nun λ', λ'' mit $\lambda' < \lambda''$ ein Paar von Punkten aus dem Spektrum von einer der beiden Matrizen H und 0H . Dann liegt mindestens ein Punkt aus dem Spektrum der anderen Matrix in dem Intervall $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$ (etwas zu modifizieren, falls $\lambda' = \lambda''$). — Weiter Sätze über Beziehungen zwischen dem Spektrum der Matrix $H = \{(h_{ik}); 1 \leq i, k < \infty\}$ und dem Spektrum $\lambda_1^n \leq \lambda_2^n \leq \dots \leq \lambda_n^n$ der Abschnittsmatrix $H^{(n)} = \{(h_{ik}); 1 \leq i, k \leq n\}$. So wird u. a. bewiesen: Bedeutet λ' den kleinsten Punkt des Häufungsspektrums (d. i. Menge der Häufungspunkte des Spektrums, vermehrt um die isolierten Punkteigenwerte unendlicher Vielfachheit) von H , dann ist $\lambda' = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^n$; wenn kein Eigenwert von H kleiner ist als λ' , dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^n = \lambda'$, $m = 1, 2, \dots$; wenn H unendlich viele Eigenwerte unter λ' hat, dann sind diese identisch mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^n$, $m = 1, 2, \dots$; hat es nur endlich viele, dann sind diese gegeben durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^n$, $m = 1, 2, \dots, l$, während $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m^n = \lambda'$ für $l+1, l+2, \dots$.

Rellick (Göttingen).

Fage, M. K.: Spektralmannigfaltigkeiten eines beschränkten linearen Operators im Hilbertschen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1609—1612 (1947) [Russisch].

$A(\omega, \alpha)$ sei die durch Γ begrenzte offene Halbebene der komplexen Zahlenebene, deren nach außen gerichtete Normale Π mit der positiven x -Achse den Winkel ω einschließt und deren Abstand von 0 gleich α ist, ebenfalls positiv in Richtung der Normalen gezählt. Ist A beschränkt im nichtseparablen Hilbertschen Raum E , so ist die Spektralmannigfaltigkeit $E_A(\omega, \alpha)$ die Menge aller x , für die für reelle $\varrho \rightarrow \infty$ $e^{\varrho(e^{-i\omega} A - \alpha I)} x$ schwach gegen 0 geht; I ist der Einheitsoperator. $E_A(\omega, \alpha)$ ist eine lineare Mannigfaltigkeit, die A und jeden mit A vertauschbaren Operator B reduziert, d. h. mit x liegt Ax bzw. Bx wieder in $E_A(\omega, \alpha)$. Ist $\alpha \leq \beta$, so $E_A(\omega, \alpha) \subset E_A(\omega, \beta)$, es ist $E_A(\omega, \alpha) = 0$ bzw. E für $\alpha < -|A|$ bzw. $\alpha > |A|$. In einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit H existiert eine in der an

$\Delta(\omega, \alpha)$ angrenzenden Halbebene $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$ reguläre Resolvente $R_\mu = (\mu I - A)^{-1}$ dann und nur dann, wenn $H \subset E_A(\omega, \alpha + \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Für $x \in H$, $y \in E$ gelten dann die reziproken Formeln

$$(e^{\bar{\lambda} A} x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\bar{\lambda} \mu} (R_\mu x, y) d\mu, \quad (R_\mu x, y) = \int_{+\Pi} e^{-\bar{\lambda} \mu} (e^{\bar{\lambda} A} x, y) d\lambda,$$

mit $\Gamma' || \Gamma$ in $\Delta(\omega + \pi, -\alpha)$, $\lambda = \varrho e^{i\omega}$, $\varrho > 0$. Es werden verallgemeinerte normale Operatoren N und verallgemeinerte nilpotente Operatoren C eingeführt. Ein Operator heißt matrixähnlich, wenn er die Form $N + C$ hat, N und C vertauschbar. Ein Operator ist dann matrixähnlich, wenn die idempotenten Operatoren $J_1(\alpha)$ bzw. $J_2(\alpha)$ mit den Fixräumen $\overline{E_A(0, \alpha)}$ bzw. $\overline{E_A(\pi/2, \alpha)}$ und den Fixräumen $\overline{E_{A^*}(0, \alpha)}$ bzw. $\overline{E_{A^*}(-\pi/2, \alpha)}$ der adjungierten Operatoren für $|\alpha| \leq |A|$ gleichmäßig beschränkte Normen haben und die quadratischen Formen $(J_k(\alpha)x, x)$, $k = 1, 2$ für beliebiges x meßbar α sind. Ohne Beweise. *G. Köthe (Mainz).*

Landsberg, P. T.: Notes on operators $F = \sum_{k=0}^n F_k(x) (d/dx)^k$. Math. Gaz., London 33, 113—115 (1949).

Nach dem Beweise zweier nicht unbekannter Hilfssätze (höhere Ableitungen eines Produkts, Dreieckssummation) werden für die Operatoren gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen die Bedingungen ausgerechnet, denen die Koeffizienten genügen, wenn der Operator hermitesch (im Komplexen selbstadjungiert) ist oder wenn zwei solche Operatoren vertauschbar sind. *Bödewadt (Brunoy).*

Zwahlen, Robert: Opérateurs hermitiens à valeurs propres liées par une formule de récurrence rationnelle. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 352—353 (1950).

Die Eigenwerte λ_n eines Hermiteschen Operators F mögen einer Rekursionsformel $\lambda_{n+2} = \sum_{i,k=0,0}^{n,q} a_{ik} \lambda_{n+1}^i \lambda_n^k \Big| \sum_{j,l=0,0}^{r,s} b_{jl} \lambda_{n+1}^j \lambda_n^l$ genügen. Dann gibt es einen Operator S mit $y_{n+1} = S y_n$, und zwischen F und S gilt $F S \sum b_{jl} F^j S^l = \sum Q_{ik} S F^i S F^k$. Umgekehrt, wenn zwischen F und S diese Beziehung besteht und wenn y_0 und $S y_0$ Eigenfunktionen von F sind, dann erhält man alle Eigenfunktionen durch $y_{n+1} = S y_n$ und die Eigenwerte durch die obige Rekursionsformel. *Rellich (Göttingen).*

Wielandt, Helmut: Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik. Math. Ann., Berlin 121, 21 (1949).

Sind A, B beschränkte Operatoren und 1 der identische Operator in einem linearen Raum \mathfrak{R} mit linearer Metrik, so ist $A B - B A = 1$ unmöglich. Dieser Satz wird so bewiesen: Aus $A B - B A = 1$ würde $A B^{n+1} - B^{n+1} A = (n+1) B^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $B^0 = 1$) folgen und mit $|A| = \text{fin sup } |Ax|/|x|$, $x \in \mathfrak{R}$, daher $(n+1) |B^n| \leq 2 |A| |B^{n+1}| \leq 2 |A| |B| |B^n|$. Also $|B^n| = 0$ für $n+1 > 2 |A| |B|$ und $|B^n| = 0$, sobald $|B^{n+1}| = 0$. Also $|B^0| = 0$ im Widerspruch zu $B^0 = 1$. *Rellich (Göttingen).*

Kramers, H. A.: Remarks on the perturbation formulae of Brillouin and Wigner. Studies Essays, pres. to R. Courant, 205—210 (1948).

Der gestörte Operator $A + V$ habe den Eigenwert F und die Eigenfunktion ψ , also $(A + V)\psi = F\psi$. Der ungestörte Operator A habe den isolierten und einfachen Eigenwert E_1 mit der Eigenfunktion φ_1 , also $A\varphi_1 = E_1\varphi_1$, $(\varphi_1, \varphi_1) = 1$. Bezeichnet R die verallgemeinerte Reziproke von $F - A$ bezüglich der Stelle $F = E_1$, also (wenn A ein reines Punktspektrum E_1, E_2, \dots mit den orthonormierten Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ hat) $Ru = \sum_{k \neq 1} \frac{(\varphi_k, u)}{F - E_k} \varphi_k$, dann folgt aus $V\psi = (F - A)\psi$ $R V \psi = \psi - (\varphi, \psi) \varphi$, $(\varphi, \psi) \varphi = (1 - R V) \psi$, $(\varphi, \psi) (1 - R V)^{-1} \varphi = \psi$. Hierbei ist F so nahe an E_1 angenommen, daß $F \neq E_2, E_3, \dots$ ist; V muß genügend klein sein. Weiter wird $(\varphi, \psi) (V \varphi, (1 - R V)^{-1} \varphi) = (\varphi, \psi) (\varphi, V \psi) = (F - E_1) (\varphi, \psi)$,

$E_1 - F + \left(V \varphi, \sum_{n=0}^{\infty} (R V)^n \varphi \right) = 0$, wenn $(\varphi, \psi) \neq 0$. Diese transzendente Gleichung für F wird in der Quantenmechanik nach Brillouin benannt. Es ist

$$\frac{\psi}{(\varphi, \psi)} = \sum_{n=0}^{\infty} (R V)^n \varphi.$$

Setzt man $\chi_v = \sum_{n=0}^v (R V)^n \varphi$, so wird $(\chi_v, (A + V - F) \chi_v) = E_1 - F + \left(V \varphi, \sum_{n=0}^{2v} (R V)^n \varphi \right)$ identisch in F . Wählt man also F als Lösung von $E_1 - F + \left(V \varphi, \sum_{n=0}^{2v} (R V)^n \varphi \right) = 0$, so wird $F = (\chi_v, (A + V) \chi_v) : (\chi_v, \chi_v)$. [J. Wigner, Mat. természett. Értes 53, 477—482 (1935); dies. Zbl. 12, 183.] An diese Tatsachen werden verschiedene Bemerkungen geknüpft. Insbesondere werden Näherungsformeln hergeleitet für den Fall, daß alle Eigenwerte E_2, E_3, \dots durch einen gemeinsamen mittleren Eigenwert ersetzt werden dürfen. Rellich (Göttingen).

Sz.-Nagy, B.: Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert. Comment. math. Helvetici 19, 347—366 (1947).

Es sei $A(\varepsilon)$ eine Schar selbstadjungierter Operatoren, die nicht beschränkt zu sein brauchen, deren Definitionsbereich aber für $-\varrho < \varepsilon < \varrho$ von ε unabhängig sein soll und für die eine Entwicklung $A(\varepsilon)f = A_0 f + \varepsilon A_1 f + \varepsilon^2 A_2 f + \dots$ für alle f aus diesem Definitionsbereich und $-\varrho < \varepsilon < \varrho$ gilt. Es enthalte das Intervall $\mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2$ einen isolierten Teil vom Spektrum des ungestörten Operators A_0 , d. h. es gebe zwei offene Intervalle der Länge d , $0 < d \leq \mu_2 - \mu_1$, mit den Mittelpunkten μ_1 und μ_2 , die keine Punkte des Spektrums von A_0 enthalten. Während bisher über diesen isolierten Teil die Annahme gemacht wurde, er bestünde aus einem einzigen Punkteigenwert endlicher Vielfachheit, wird hier eine Störungstheorie ohne diese Voraussetzung entwickelt. Der Beweis weicht von dem bisherigen wesentlich ab und liefert auch unter den alten Voraussetzungen schärfere Fehlerabschätzungen. Der Gedanke des Beweises ist dieser: Bezeichnet $E_\lambda(\varepsilon)$ die Spektralschar von $A(\varepsilon)$, so läßt sich $P_A(\varepsilon) = E_{\mu_2}(\varepsilon) - E_{\mu_1}(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \oint R_z(\varepsilon) dz$ schreiben mit $R_z(\varepsilon) = (A(\varepsilon) - z)^{-1}$. Der analytische Charakter von $R_z(\varepsilon)$ läßt sich angeben, und so ergibt sich $P_A(\varepsilon) = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots$, $A(\varepsilon) P_A(\varepsilon) = \lambda_0 P_A(\varepsilon) + B_0 + \varepsilon B_1 + \dots$ mit expliziten Abschätzungen für die $P_0, P_1, \dots, B_0, B_1, \dots$. Durch Spezialisierung wird nun zunächst die Störungstheorie für einen isolierten einfachen Eigenwert (von A_0) gewonnen, und zwar mit schärferen Abschätzungen für die Entwicklungskoeffizienten des gestörten Eigenwertes bzw. Eigenelementes als den bisherigen. Sodann wird durch vollständige Induktion der Beweis erbracht, daß ein isolierter Eigenwert endlicher Vielfachheit (von A_0) sich samt den Eigenelementen regulär analytisch aufspaltet. Schließlich wird dasselbe bewiesen für einen isolierten Eigenwert (von A_0) unendlicher Vielfachheit, der jedoch „in erster Näherung“ einfach ist; auch hier ergeben sich explizite Abschätzungen für die Näherungen der Eigenwerte und Eigenelemente. Rellich (Göttingen).

Sz.-Nagy, Béla de: Vibrations d'une corde non homogène. Bull. Soc. math. France 75, 193—208 (1947).

Eigenwertproblem der schwingenden Saite mit der Massenverteilung $m(x)$, die nicht als stetig vorausgesetzt wird. Existenz der Eigenwerte und Entwicklungssätze unter gleichzeitiger Heranziehung der beiden inneren Produkte $\int_0^l f(x) g(x) dm(x)$ und $\int_0^l u'(x) v'(x) dx$. Entwicklungssatz für das Anfangswertproblem der schwin-

genden Saite. Störungsproblem für $m = m_0(x) + \varepsilon m_1(x)$. Als numerisches Beispiel homogene Masse mit zusätzlicher Einzelmasse. Rellich (Göttingen).

Straus, A. V.: Über eine Klasse regulärer Operator-Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 577—580 (1950) [Russisch].

Le but de cette Note est apparemment d'étendre le lemme de Schwarz aux fonctions analytiques dont les valeurs sont des opérateurs continus appliquant un espace de Hilbert \mathfrak{H}_1 dans un espace de Hilbert \mathfrak{H}'_1 (il serait du reste intéressant de savoir les raisons qui ont conduit l'A. à étudier ce problème, dont l'intérêt n'est pas absolument évident). Soit donc $F(z)$ une telle fonction, analytique dans le cercle $|z| < 1$, et vérifiant $\|F(z)\| \leq 1$; l'A. annonce qu'on peut construire F de la façon suivante (dans le cas classique, les formules qui vont suivre expriment que F se déduit, par une représentation conforme du cercle unité sur lui-même, d'une fonction auquel le lemme de Schwarz est applicable). On prend deux espaces de Hilbert \mathfrak{H}_2 et \mathfrak{H}'_2 ; puis des opérateurs V_{ij} ($i, j = 1, 2$) appliquant \mathfrak{H}_j dans \mathfrak{H}'_i , tels que la „matrice“ (V_{ij}) définisse une application isométrique de $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ sur $\mathfrak{H}'_1 \oplus \mathfrak{H}'_2$, V_{12} étant au surplus biunivoque; enfin, on prend une fonction $G(z)$, dont les valeurs sont des applications de \mathfrak{H}'_2 dans \mathfrak{H}_2 , analytique dans le cercle, et vérifiant $\|G(z)\| \leq |z|$. Ceci étant, la fonction $F(z)$ s'écrit, en choisissant convenablement les données précédentes, sous la forme

$$F(z) = (V_{12}^*)^{-1} (G(z) - V_{22}^*) (I - V_{22} G(z))^{-1} V_{21}.$$

R. Godement (Nancy).

Grinbljum, M. M.: Die Spektralfunktion im Banaachschen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 941—944 (1950) [Russisch].

Soient E un espace de Banach, (P_λ) et (P^λ) deux familles à un paramètre de sous-espaces (fermés) de E ; on dit qu'elles forment une paire si: a) $E = P_\lambda \oplus P^\lambda$ pour tout λ ; b) P_λ est une fonction croissante, et P^λ une fonction décroissante de λ ; c) le sous-espace de E engendré par les P_λ est E lui-même. On pose d'une manière générale $P_{\lambda, \mu} = P_\mu \cap P^\lambda$; et l'on dit que $(P_\lambda; P^\lambda)$ est une (α) -paire si, pour tout λ , la distance de P^λ à la sphère unité de P_λ est $\geq \alpha$. On a alors ce qui suit (dans le cas d'une (α) -paire avec $\alpha > 0$): 1) si une suite strictement croissante (λ_n) converge vers une limite λ , alors le sous-espace $P_{\lambda, 0} = P_{\lambda_1} + \sum P_{\lambda_i} \lambda_{i+1}$ est fermé, et ne dépend que de λ ; si l'on pose de même $P^{\lambda, 0} = \cap P^{\lambda_i}$, alors on a $P_{\lambda, 0} \oplus P^{\lambda, 0} = E$; on définit de même, à l'aide de suites décroissantes, les sous-espaces $P_{\lambda, +0}$ et $P^{\lambda, +0}$. 2) On suppose maintenant en outre (ce qui ne restreint pas la généralité) que $P_{\lambda, +0} = P_\lambda$ et $P^{\lambda, +0} = P^\lambda$; alors on peut associer à chaque intervalle Δ de la droite un opérateur $P(\Delta)$ —par exemple, si $\Delta = [\alpha, \beta]$ on pose $P(\Delta) = P_\beta - P_{\alpha, 0}$, où l'on désigne maintenant par P_λ l'opérateur de projection sur le sous-espace de même nom; ceci étant, $P(\Delta)$ est en un sens évident une fonction complètement additive, et $P(\Delta' \cap \Delta'') = P(\Delta') \cap P(\Delta'')$ (ici, il s'agit de sous-espaces: les notations de l'A. ne sont pas à recommander...); d'où la possibilité de définir $P(\Delta)$ lorsque Δ est, plus généralement, une réunion finie d'intervalles. L'A. donne ensuite une définition de ce qu'il appelle une fonction spectrale; et montre que sa définition (assez compliquée) équivaut à la suivante, qui est fort sympathique: pour qu'une (α) -paire $(P_\lambda; P^\lambda)$ soit une fonction spectrale, il faut et il suffit que, pour toute forme linéaire continue F sur E et tout $x \in E$, la fonction d'intervalle $F(P(\Delta)x)$ soit à variation bornée sur la droite; il est clair (ce que l'A. ne dit pas) qu'on peut alors définir, comme dans le cas des espaces de Hilbert et au moins si E est séparable, le symbole $\int f(\lambda) dP(\lambda)$. On est en droit d'espérer que l'A. continuera ses investigations sur un sujet qui risque fort d'être intéressant.

R. Godement (Nancy).

Pitt, H. R.: The definition of measure in function space. Proc. Cambridge philos. Soc. 46, 19—27 (1950).

Es seien bei jedem natürlichen n die Elemente von $s = (s_1, \dots, s_n)$ nicht

übereinander greifende Intervalle eines solchen Systems Σ von reellen, offenen oder geschlossenen Intervallen, welches mit zwei Elementen auch ihr Produkt und ihre Differenz enthält. $(a, b) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$ bezeichne ein n -dimensionales Intervall. Verf. zeigt nun, daß man ein Maß innerhalb eines Borelschen Systems von meßbaren Teilmengen der Gesamtheit Ω aller reellen Funktionen $x(t)$ so einführen kann, daß der Menge $a_i \leq x(t_i) \leq b_i$ bei $t_i \in s_i$ ein Maß $M(s; a, b)$ mit folgenden Eigenschaften zukommt. 1. Bei festem s ist M vom Charakter der Änderung einer n -dimensionalen Verteilungsfunktion über (a, b) , 2. bei nicht übereinander greifenden s'_1, s und mit $s'_1 + s_2$ als ein Intervall von Σ ist

$$M(s'_1 + s_1, s_2, \dots, s_n; a; b) = M(s_1, s'_1, s_2, \dots, s_n; a_1, a; b_1, b).$$

Enthält Σ alle reellen Punkte als ausgeartete Intervalle, so umfaßt obiges Maß das 1933 von Kolmogoroff gegebene. Letzteres ordnet bekanntlich der Menge $x(t_i) \leq b_i$ bei allen reellen b_i, t_i als Maß ein $F(t_1, \dots, t_n; b)$ vom Charakter einer Verteilungsfunktion in b zu, läßt aber viele wichtige, insbesondere die vorher betrachteten Mengen als nicht meßbar übrig. Wählt man Σ so, wie zuletzt und bei $s_1 = t$ als einzelнем Punkt $M(s; a; b)$ meßbar in t , dann läßt sich das neue Maß so erweitern, daß $x(t)$ eine meßbare Funktion von (x, t) im Produktraum von Ω und der reellen Zahlen wird, und zwar mit dem Produkt der Maße in den beiden letzteren Räumen als Maß, während beim Kolmogoroffschen Maß die in der Ergodentheorie benötigte „fast immer“ Meßbarkeit von $x(t)$ noch nicht gesichert wird. Das zuletzt erweiterte Maß umfaßt das 1937 von Doob gegebene. Sein Verhältnis zu dem 1943 von Kakutani gegebenen Maß konnte aber Verf. noch nicht genau festlegen.

Szentmártony (Budapest).

Nemyckij, V. V.: Zur Theorie der Bahnkurven allgemeiner dynamischer Systeme. Mat. Sbornik, n. S. **23**, 161—186 (1948) [Russisch].

Wie Barbašin (dies. Zbl. **29**, 38) und Krasnosel'skij und Krejn (dies. Zbl. **30**, 116) verallgemeinert Verf. Methoden und Ergebnisse von Birkhoff (Dynamical Systems, New York 1927). Ein „allgemeines dynamisches System“ $[M, G]$ wird definiert durch eine lokal-kompakte kommutative metrisierbare Gruppe G von Homomorphismen g eines vollständigen metrischen Raumes M in sich. Jedes $g \in G$ ordnet jedem $x \in M$ ein Bild $y = f(x, g) \in M$ zu. Die Menge $R = f(x, G)$ heißt die „Bahn“ von x ; R ist eineindeutiges Bild der Faktorgruppe $F = G/H_x$, wo H_x die Menge aller $h \in G$ mit $f(x, h) = x$ ist. — Ein dynamisches System $[R^n, G^k]$ wird z. B. durch ein vollständig integrabiles Pfaffsches System totaler Differentialgleichungen $dx_h = \sum_{i=1}^k a_{hi}(x_1, \dots, x_n) dt_i$ ($h = 1, \dots, n$) erzeugt; hier sind die

möglichen topologischen Strukturen der Bahnkurven leicht zu übersehen. — Liegt eine Einteilung eines Raumes M in Klassen E vor, so wird als Vermutung eine hinreichende Bedingung dafür formuliert, daß die E sich als Bahnen eines Systems $[M, G]$ auffassen lassen. — $q (\in M)$ heißt dynamischer Häufungspunkt von $f(p, G)$, wenn es eine Folge $\{g_n\} \subset G$ ohne Häufungspunkt in G gibt mit $f(p, g_n) \rightarrow q$; und zwar echter dyn. H.P., wenn es keine konvergente Folge $\{\bar{g}_n\}$ mit $f(p, \bar{g}_n) = f(p, g_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) gibt. — Äquivalent sind die Aussagen: a) $f(p, G)$ ist topologisches Bild von G/H_p ; b) $f(p, G)$ hat keine echten dyn. H.P.; c) $f(p, G)$ ist abgeschlossen. — $f(p, G)$ heißt rekurrent, wenn sich $f(p, G)$ durch $f(p, K)$ mit passendem kompaktem $K \subset G$ beliebig genau approximieren läßt. Die abgeschlossene Hülle einer rekurrenten Bahn ist kompakt, invariant bei G und minimal (d. h. hat keine echte invariante abgeschlossene Teilmenge); hiervon gilt auch die Umkehrung.

Wecken (Haltingen).

Graves, L. M.: What is a functional. Amer. Math. Montly **55**, 467—472 (1948).

L'A. espone alcune considerazioni sui funzionali e rileva il seguente teorema valevole in spazi anche più generali di quello di Banach: Sia (y_n) una successione

minimizzante im funktionale $f(y)$ in S , che è compatta in S e sia supponga che $f(y)$ sia semicontinuo inferiormente relativamente ai sottoinsiemi compatti di S , allora $f(y)$ ammette minimo in S .
S. Cinquini (Pavia).

Praktische Analysis:

Bottema, O.: A geometrical interpretation of the relaxation method. Quart. appl. Math. 7, 422—423 (1950).

Die Anwendung der im Kern auf Seidel zurückgehenden und von Southwell zu großer Entfaltung gebrachten Relaxationsmethode auf ein lineares Gleichungssystem $\mathfrak{A} \mathfrak{x} - \mathfrak{r} = 0$ mit k Unbekannten, verlangt die Konstruktion einer Folge von Näherungslösungen $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \dots, \mathfrak{x}^{(n)}, \dots$ durch sukzessive Verkleinerung der Defizite $|\mathfrak{v}^{(n)}| = |\mathfrak{A} \mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{r}|$. Dabei darf sich $\mathfrak{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)})$ nur in einer Komponente $x_i^{(n)}$ von $\mathfrak{x}^{(n-1)}$ unterscheiden. Der Verf. präzisiert dieses Vorgehen durch die Forderungen $i \equiv n \pmod{k}$ und durch $|\mathfrak{v}^{(n)}| = \text{Min.}$ hinsichtlich der Variationen von $x_i^{(n)}$ und interpretiert $\mathfrak{v}^{(n)}$ als Projektion von $\mathfrak{v}^{(n-1)}$ auf eine nur vom Gleichungssystem abhängige Hyperebene. — Nun beruht die praktische Bedeutung der Relaxationsmethode gerade auf der Freiheit des Rechners, die Komponente $x_i^{(n)}$ und ihre Variation nach der jeweiligen Situation zu wählen, um mit wenig Rechenarbeit ein*rasch gegen Null konvergierende Folge $\mathfrak{v}^{(n)}$ zu entwickeln. Es darf daher bezweifelt werden, daß die geometrische Interpretation des Verf. ein scharfes Bild jener Methode entwirft.
Hans Bückner (Minden).

Rutishauser, Heinz: Eine Konvergenzverbesserung für die Newtonsche Methode. Z. angew. Math. Phys., Basel 1, 211—212 (1950).

Kincaid, W. M.: Solution of equations by interpolation. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 19, 207—219 (1948).

Verf. schildert im ersten Teil eine Methode zur numerischen Auflösung einer Gleichung $y(x) = 0$, die eine Kombination des Newtonschen Verfahrens mit inverser Interpolation ist und von A. C. Aitken [Proc. math. Soc., Edinburgh, II. S. 3, 56—76 (1932); dies. Zbl. 5, 20] und E. H. Neville [J. Indian math. Soc. 20, 87—120 (1934); dies. Zbl. 10, 31] stammt. Vorausgeschickt wird die Berechnung des Interpolationspolynoms $f_{12\dots n}(t)$ in der Form von Lagrange mit den Interpolationsstellen t_1, t_2, \dots, t_n (die auch übereinstimmen können) für einen Argumentwert $t = t_0$, wozu ein Steigungsschema benutzt wird, das den Rechenvorgang in eine Folge von linearen Interpolationen auflöst. Gesucht wird nun der Wert der Umkehrfunktion $x(y)$ für $y = 0$. Dazu wird schrittweise für passend gewählte Stellen y_1, y_2, \dots , die gegen Null streben, $x_{11}(0), x_{12}(0), x_{112}(0), x_{23}(0), x_{123}(0), x_{1123}(0), x_{33}(0), x_{233}(0), x_{1233}(0)$ usf. berechnet. — Im zweiten Teil wird dieses Verfahren auf zwei Gleichungen $u(x, y) = 0, v(x, y) = 0$ ausgedehnt. Es werden $X = u v_y - v u_y$ und $Y = u v_x - v u_x$ als Hilfsveränderliche eingeführt. Für $u = 0, v = 0$ ergibt sich

$$X = Y = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

In der Nachbarschaft einer Lösung kann näherungsweise X als Funktion von x allein und Y als Funktion von y allein angesehen werden, so daß sich die Methode des ersten Teils übertragen läßt.
Günther Schulz (Aachen).

Vernotte, Pierre: Sommaton, par pondération binomiale des series convergentes alternées qui paraissent commencer par diverger; application aux séries divergentes. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1840—1842 (1949).

Vernotte, Pierre: Sommaton des séries divergentes par une simple considération de régularité. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1918—1920 (1949).

Es wird auf die Brauchbarkeit von Ergebnissen einer Untersuchung des Verf. (Publ. sci. techn. Ministère de l'Air, Sér. grise No. 207), insbesondere zur Auswertung von sehr langsam konvergierenden Reihen und von Kettenbrüchen hingewiesen.

R. Schmidt (München).

Vernotte, Pierre: L'emploi de la condition de régularité dans la sommation des séries divergentes. Calcul de quelques séries très divergentes. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 505—506 (1950).

Bemerkungen zu einer früheren Untersuchung des Verf. (Publ. sci. techn. Ministère de l'Air, Sér. grise, No. 207). R. Schmidt (München).

Mikeladze, Š. E.: Neue Formeln zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **61**, 789—790 (1948) [Russisch].

Es sei $t_0 = 0$ und t_1, t_2, \dots, t_r ; a, h, t_α, t_β willkürliche reelle Zahlen. Mit Hilfe des Taylorpolynoms der Ordnung n und der Newtonschen Interpolationsformel findet Verf. einen neuen Ausdruck für $y^{(k)}(a + h t_\alpha)$ ($k \leq n$). Diese Formel ist ein linearer Ausdruck von $y^{(\nu)}(a + h t_\alpha)$ ($k \leq \nu < n$) und $y^{(n)}(a + t_i h)$ ($i = 0, 1, \dots, r$), dessen Koeffizienten gegebene Zahlen und (elementare) bestimmte Integrale sind. Wesentlich ist, daß die Formel auch bei Permutationen von t_0, t_1, \dots, t_r richtig bleibt. Man kann so z. B. die Werte $y^{(k)}(a + i h)$ sukzessive ausdrücken; d. h. man hat so ein Hilfsmittel für die numerische Lösung der Differentialgleichungen der Ordnung n . Dieses Resultat enthält zwei frühere Formeln des Verf. als spezielle Fälle [Izvestija Akad. Nauk SSSR **1939**, 627—642; dies. Zbl. **24**, 269 und Mitteil. Wiss. Akad. Gruz. SSR **3**, 1001 (1942)]. Druckfehler in der Formel (1): lies $(n - k)!$ statt $n - k!$. Gál (Princeton).

Collatz, L.: Differenzenverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung. Z. angew. Math. Mech. **29**, 199—209 (1949).

Zur numerischen Berechnung von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung, deren unmittelbare Behandlung gegenüber einem Aufspalten in ein System von n Gleichungen 1. Ordnung hinsichtlich Schreibarbeit und Genauigkeit beträchtliche Vorteile hat, werden in Verallgemeinerung der Adamsschen und Störmerschen Formeln für Extra- und Interpolation allgemeine Formelsätze entwickelt, welche die meisten der bekannten Differenzenschemaverfahren als Spezialfälle enthalten. Aus den in Betracht kommenden Newtonschen und Stirlingschen Interpolationsformeln werden zunächst durch n -malige Integration die allgemeinen Integrationsformeln und, durch Spezialisierung der Integrationsgrenzen, besondere Formeln einschließlich der Restglieder hergeleitet. Die Koeffizienten dieser Formeln sind für die verschiedenen Fälle angegeben und für $n = 1$ bis 4 übersichtlich zusammengestellt. Nach einem Formelsatz für die Anfangsiteration werden in Verallgemeinerung der Adamschen und Störmerschen allgemeine Formeln für Extra- und Interpolation angegeben, darunter insbesondere der Formelsatz für zentrale Differenzen, allgemein und in der für den Gebrauch handlichen Form bis zu Gliedern mit den zweiten Differenzen. Es wird die Konvergenz der Iteration für die einzelnen Verfahren untersucht, und es werden zum Schluß die bekannten Fehlerabschätzungen auf Gleichungen n -ter Ordnung ausgedehnt. Das Verfahren der zentralen Differenzen erweist sich hinsichtlich Arbeitsaufwand, Konvergenz und Genauigkeit wiederum als besonders vorteilhaft.

R. Zurmühl (Darmstadt).

Wilson, E. M.: A note on the numerical integration of differential equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **2**, 208—211 (1949).

Verf. gibt der bekannten Methode, eine Differentialgleichung n -ter Ordnung tabellarisch durch Taylorsche Reihen zu integrieren, eine neue Lesart, die sich oft auf lineare Gleichungen anwenden läßt. Die Methode besteht darin, daß die Lösung und ihre ersten $n - 1$ Ableitungen an einer Stelle der Tabelle als Summen der Werte dieser Funktionen an der vorher tabulierten Stelle, multipliziert mit im voraus berechneten Funktionen der unabhängigen Variablen, dargestellt werden. — Für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' = P(x)y + Q(x)y' + R(x)$ erhält man $y(x + w) = P_1 y + Q_1 y' + R_1$ und $y'(x + w) = P_2 y + Q_2 y' + R_2$. Dabei

sind P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2 und R_2 Funktionen von x allein (bei festem Tabellenintervall w) in Form von Potenzreihen in w . — Um das Verfahren ökonomisch zu gestalten, sind für große Genauigkeit automatische Rechenmaschinen nötig. — An der Gleichung $y'' = y' + \alpha xy$ für $\alpha = 0, 1$; $w = 0, 1$ und $0 \leq x \leq 1$ wird das Verfahren erläutert (Genauigkeit 10 Dezimalen). Die vorbereitenden Rechnungen der Funktionen P, Q usw. können mit Nationalbuchungsmaschinen, Hollerithmaschinen oder dgl., die schrittweisen Integrationen mit einer gewöhnlichen Rechenmaschine durchgeführt werden.

Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Jahn, H. A.: Improvement of an approximate set of latent roots and modal columns of a matrix by methods akin to those of classical perturbation theory. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 131—144 (1948).

Von einer quadratischen n -reihigen Matrix A seien n linear unabhängige „angenäherte“ Eigenvektoren $x_r^{(0)}$, $r = 1, \dots, n$ bekannt. Dann kann man Zahlen $\lambda_r^{(1)}, a_{rs}^{(1)}$ so bestimmen, daß $A x_r^{(0)} = \lambda_r^{(1)} x_r^{(0)} + \sum_{s \neq r} a_{rs}^{(1)} x_s^{(0)}$ wird. Die $\lambda_r^{(1)}$ werden als erste Näherung der gesuchten Eigenwerte aufgefaßt, während

$$x_r^{(1)} = x_r^{(0)} + \sum_{s \neq r} \frac{a_{rs}^{(1)}}{\lambda_r^{(1)} - \lambda_s^{(1)}} x_s^{(0)}$$

als Verbesserung der $x_r^{(0)}$ angesehen wird. Allgemein

$$A x_r^{(p-1)} = \lambda_r^{(p)} x_r^{(p-1)} + \sum_{s \neq r} a_{rs}^{(p)} x_s^{(p-1)}$$

wenn $x_r^{(p-1)}$, $r = 1, \dots, n$ schon bekannt ist. Daraus entnimmt man die $\lambda_r^{(p)}$ und

dann $x_r^{(p)} = x_r^{(p-1)} + \sum_{s \neq r} \frac{a_{rs}^{(p)}}{\lambda_r^{(p)} - \lambda_s^{(p)}} x_s^{(p-1)}$; $p = 1, 2, \dots$ Numerisches Beispiel für drei-

zeilige symmetrische Matrix. (Auf den Zusammenhang mit Jacobi und Magnier wurde von Bodewig hingewiesen.)

Rellich (Göttingen).

Collar, A. R.: Some notes on Jahn's method for the improvement of approximate latent roots and vectors of a square matrix. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 145—148 (1948).

Bemerkungen zur Schreibweise und zur Größenordnung der vernachlässigten Glieder. (Vgl. vorsteh. Referat.)

Rellich (Göttingen).

Wassermann, G. D.: A note on boundary perturbations. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 206—207 (1950).

Es handelt sich um eine wesentliche Ergänzung zu einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **29**, 306). Verf. stellt fest, daß die dort abgeleitete Theorie noch einer zusätzlichen Voraussetzung über die Änderung des Randes bedarf, und entwickelt eine sich daraus ergebende vereinfachte Darstellung. Zusammenfassend wird bemerkt, daß Probleme, bei denen sich der Rand-Normalenvektor bei einer kleinen Änderung des Randes stark ändert, mit der dargestellten Theorie nicht behandelt werden können (— also auch nicht das in der früheren Arbeit durchgerechnete Beispiel — Anm. d. Ref.).

A. Schubert (Dresden).

Lighthill, M. J.: A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **40**, 1179—1201 (1949).

Verf. schlägt eine neue Methode vor, wonach eine nicht-lineare (evtl. auch partielle) Differentialgleichung zur angenäherten Lösung geführt werden kann; dabei sind offenbar gewisse Grenzbedingungen zu erfüllen: Gleichungen solcher Art kommen häufig bei mathematischer Behandlung praktischer Probleme vor. Eine strenge Grundlegung fehlt noch und wird den Mathematikern überlassen. Das wesentliche an der Methode läßt sich aber an einem vom Verf. behandelten Beispiel

klarlegen. Hat man etwa die Differentialgleichung: $(x + \alpha u) du/dx + (2 + x)u = 0$ unter der Grenzbedingung: $x = 1, u = e^{-1}$ angenähert zu lösen, so findet man nach dieser Methode

$$u = e^{-z} z^{-2} + \alpha \left[e^{-z} z^{-2} \left\{ \frac{2}{3z^3} + \frac{1}{3z^2} - \int_z^1 e^{-z} \left(\frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3} \right) dz \right\} \right] + O\left(\frac{\alpha^3}{z^6}\right),$$

$$x = z - \frac{\alpha}{3z^2} - \frac{3\alpha^2}{10z^4} + O\left(\frac{\alpha^3}{z^6}\right).$$

Man denkt sich sowohl die abhängige Variable u wie auch die unabhängige Variable a als Funktion einer dritten Variable z und ersetzt sie in der gegebenen Differentialgleichung durch Potenzreihen

$$u(z, \alpha) = u_0(z) + \alpha u_1(z) + \alpha^2 u_2(z) + \dots, \quad x(z, \alpha) = z + \alpha x_1(z) + \alpha^2 x_2(z) + \dots$$

Um die funktionale Abhängigkeit der Variablen x von z zu bestimmen, geht man probierend dermaßen vor, daß u_1, u_2 usw. die gleichen Singularitäten besitzen wie u_0 . — Verf. läßt hierauf auch andere Beispiele folgen (eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, eine partielle Differentialgleichung usw.). *S. C. Kar (Calcutta).*

Dronkers, J. J.: Ein Iterationsprozeß zur Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung II. Ordnung. I, II. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 329—337, 479—487 (1949) [Holländisch].

In der Differentialgleichung soll mindestens eine der nicht gemischten zweiten Ableitungen der Unbekannten $z(x, y)$ auftreten, so daß sie auf die Gestalt

$$(1) \quad z_{xx} + a z_{yy} + b z_{xy} + c z_x + d z_y + e z + f = 0$$

gebracht werden kann. Verf. zerlegt sie nun in das System

$$(2) \quad z_x = \alpha u_y + \beta_1 z_y + \gamma_1 z + \delta, \quad u_x = \beta_2 z_y + \gamma_2 z.$$

Dabei ist α durch eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, von der jedoch nur irgendeine partikuläre Lösung gebraucht wird, ohne daß also Randbedingungen gestellt werden. Für viele Sonderfälle vereinfacht sich diese Gleichung noch. Die übrigen Koeffizienten in (2) sind dann unmittelbar oder aus gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zu berechnen. Die Anfangswerte von z und z_x sind auf der Randkurve $x = 0$ vorgeschrieben, welche nirgends mit einer Charakteristik zusammenfallen darf. (Der Fall anderer Randkurven läßt sich hierauf zurückführen, wobei im Fall einer geschlossenen Kurve die Randwerte von z und z_x verträglich sein müssen.) Dann sind auch die Anfangswerte $z_0(y), u_0(y)$ von z, u auf $x = 0$ bekannt. Diese werden als Ausgangsnäherung für die Lösung des Systems (2) genommen. Aus einer Näherung ergibt sich jeweils die folgende, indem die letzte Näherung auf der rechten Seite von (2) eingesetzt und dann nach x integriert wird. Der Konvergenzbeweis für dieses Verfahren gelingt ohne die gewöhnlich gemachten Annahmen über die Beschränktheit von z, z_x, z_y unter nachstehenden Voraussetzungen: In einem Rechteck $(0 \dots A, 0 \dots B)$ der xy -Ebene bestehen die Ableitungen b_x und c_x . Die Funktionen $a \dots f, b_x, c_x$ sind dort als Funktionen von x stetig. Als Funktionen von y sind sie ebenso wie die Randwerte $z(0, y), z_x(0, y)$ analytisch und beschränkt. *Bödewadt (Brunoy).*

Kato, Tosio: Upper and lower bounds of eigenvalues. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 413 (1950).

λ sei ein einfacher Eigenwert eines hermiteschen Operators H , und das Intervall (α, β) enthalte außer λ keinen weiteren Eigenwert. Ist w eine Annäherung für eine Eigenfunktion und $\eta = (w, Hw)/\|w\|^2$, $\varepsilon = \|(H - \eta)w\|/\|w\|$, so gilt

$$\eta - \frac{\varepsilon^2}{\beta - \eta} \leq \lambda \leq \eta + \frac{\varepsilon^2}{\eta - \alpha}, \quad \text{sofern} \quad \varepsilon^2 < (\eta - \alpha)(\beta - \eta)$$

(wie bei N. J. Lehmann, dies. Zbl. 34, 379).

Collatz (Hannover).

Plunkett, Robert: On the convergence of matrix iteration processes. Quart. appl. Math. 7, 419—421 (1950).

Neuer, auf Matrizen zugeschnittener Beweis einer vom Ref. gefundenen Bedingung für die Konvergenz eines auf Wiarda zurückgehenden Iterationsverfahrens für Integralgleichungen und für Matrizen (vgl. Ref., dies. Zbl. 30, 392).

Hans Bückner (Minden).

Rasor, Eugene A.: The fitting of logistic curves by means of a nomograph. J. Amer. statist. Assoc. 44, 548—553 (1949).

Gegeben werden einfache Nomogramme zur Berechnung der Konstanten a , b und k in der Gleichung $y = k/(1 + e^{a+bx})$, wenn drei Punkte auf der zugehörigen Kurve gegeben sind, und zur Berechnung von $\max y$. Bergström (Göteborg).

Boulanger, Georges: Sur la notion de contact nomographique. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 971—973 (1949).

Verf. zeigt, wie eine Klassifikation der nomographischen Berührungen im Sinne d'Ocagnes aufzustellen ist und was sich daraus für Möglichkeiten für die gesamte Struktur der Nomogramme ergeben. Rudolf Ludwig (Braunschweig).

Herrera, Emilio: Flexi-calculateur pour intégrales et fonction elliptiques, son application au calcul de la „courbe de l'éclaireur“. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1134—1136 (1950).

Der Apparat besteht aus einer Platte mit kartesischem Koordinatennetz, aus der eine Kreisrille ausgespart ist, in der ein Läufer verschoben und festgeklebt werden kann. Die Rille trägt innen eine Skala für α , außen für $k = \sin \alpha$. Einerseits im Läufer andererseits im Nullpunkt in y -Richtung ist eine Stahllamelle festgeklebt mit einer Skala für das elliptische Integral erster Art $u = F(\varphi, k)$ und die Weierstraßsche Funktion $\wp(u; 0, 1)$. Die Ordinatenachse trägt eine Skala für $2E(\varphi, k) - F(\varphi, k)$. Weiter ist eine um einen Punkt der negativen Ordinatenachse drehbare gerade Schiene mit den Skalen für die Jacobischen Funktionen $\varphi = \operatorname{am}(u)$, $x = \operatorname{sn}(u)$ bzw. $\operatorname{cn}(u)$ vorhanden, die ebenfalls mittels halbkreisförmiger Skala für α und k eingestellt werden kann. Schließlich ist eine gekrümmte Skala für die vollständigen Integrale eingezeichnet. — Der Apparat erlaubt zu gegebenen α bzw. k und φ bzw. x die Werte von F , $2E - F$ und $\wp(u; 0, 1)$ und zu k und u die Jacobischen Funktionen abzulesen. Benutzt wurde er zur Berechnung der Integrale der Gleichung $ax y' = ay \pm y^2 \sqrt{1 + y'^2}$, die sich in geschlossener Form unter Benutzung elliptischer Integrale darstellen lassen. Willers (Dresden).

Wijngaarden, A. van and W. L. Scheen: Table of Fresnel integrals. Verh. Nederl. Akad. Wet., Afd. Natuurk., I. Sect. 19, Nr. 4. 26 S. (1949).

Zur Berechnung der Fresnelschen Integrale $C(u) = \int_0^u \cos(\frac{1}{2}\pi t^2) dt$ und $S(u) = \int_0^u \sin(\frac{1}{2}\pi t^2) dt$ stehen die beständig konvergenten Potenzreihen

$$C(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{4\nu+1} u^{4\nu+1} \quad \text{und} \quad S(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{4\nu+3} u^{4\nu+3} \quad \text{mit}$$

$C_{4\nu+1} = (-1)^\nu (\pi/2)^{2\nu} / (2\nu)! (4\nu+1)$ und $S_{4\nu+3} = (-1)^\nu (\pi/2)^{2\nu+1} / (2\nu+1)! (4\nu+3)$, ferner die asymptotischen Entwicklungen

$$C(u) \sim \frac{1}{2} + \sin(\frac{1}{2}\pi u^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{4\nu+1} u^{-(4\nu+1)} - \cos(\frac{1}{2}\pi u^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{4\nu+3} u^{-(4\nu+3)}$$

und

$$S(u) \sim \frac{1}{2} - \cos(\frac{1}{2}\pi u^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{4\nu+1} u^{-(4\nu+1)} - \sin(\frac{1}{2}\pi u^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{4\nu+3} u^{-(4\nu+3)}$$

mit

$$\gamma_{4\nu+1} = (-1)^\nu 2 \frac{(4\nu)!}{(2\nu)!} (2\pi)^{-(2\nu+1)} \quad \text{und} \quad \sigma_{4\nu+3} = (-1)^\nu 2 \frac{(4\nu+2)!}{(2\nu+1)!} (2\pi)^{-(2\nu+2)}$$

zur Verfügung. Für $u = 0.00, 0.01, \dots, 20.00$ werden die Werte von $C(u)$ und $S(u)$ 5-stellig tabuliert. Die Verf. verbürgen sich für die Zuverlässigkeit der letzten Dezimale, also für einen Fehler der Tabellenwerte von höchstens $5 \cdot 10^{-6}$. Bei linearer Interpolation kann der Gesamtfehler nicht größer als $40 \cdot 10^{-6} \cdot h$ werden. Berücksichtigt man zweite Differenzen — das Tafelwerk ist für die Anwendung der Interpolationsformel von Everett eingerichtet und enthält dementsprechend die modifizierten zweiten Differenzen, ferner eine Gebrauchstafel der Faktoren E_6^2 und E_1^2 —, so kann der Gesamtfehler den Wert $5 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6} = 11 \cdot 10^{-6}$ nicht überschreiten.

R. Schmidt (München).

MacDonald, A. D.: Properties of the confluent hypergeometric function. J. Math. Phys., Massachusetts **28**, 183—191 (1949).

Außer einer Wiedergabe wichtiger Beziehungen der konfluenten hypergeometrischen Funktion enthält die Note sechsstellige Tafeln der Funktionenwerte für die Parameterwerte $\gamma = 0,5; 1,0; 1,5$ und $2,0$ und $\alpha = 0,001; 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 0,8; 0,9$ und $1,0$. Tabellen der zweiten Lösung der Differentialgleichung für $\gamma = 1, 2$ und 3 und die gleichen Werte von α wie oben sind ebenfalls berechnet. Die Tafeln enthalten Werte für Argumente bis zu $8,0$ in Stufen von $0,5$, während für Argumentwerte größer als 8 die asymptotischen Reihenentwicklungen zur Berechnung der Funktionenwerte genügen.

Gran Olsson.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Fréchet, Maurice: Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié. Ann. Inst. Henri Poincaré **10**, 215—310 (1947).

Nachdem Verf. in Rev. sci., Paris **82**, 483—512 (1944) den Begriff des Verteilungsmomentes k -ter Ordnung $\mathfrak{M}(X, a)^k$ des abstrakten Zufallselementes X bezüglich einer Stelle a in einem mit Wahrscheinlichkeitsmaß versehenen Raume mit der Entfernung (X, a) besprochen hat, werden hier die weiteren Grundbegriffe einer allgemeinen Theorie eingehend geschildert und an den klassischen Beispielen der ein- und mehrdimensionalen Zufallsgrößen sowie der Zufallsfunktionen erläutert. — Kapitel I behandelt die typische(n) Stelle(n) k -ter Ordnung der Verteilung. Und zwar als $a = c$ Stelle(n), an welcher (welchen) $([X], [a]) = (\mathfrak{M}(X, a)^k)^{1/k}$ seinen Kleinstwert annimmt, insofern die Momente beschränkt sind. Sonst die von b unabhängige(n) Stelle(n) c , an welcher (welchen)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{([X_n^b], [c])^k - (\inf_a ([X_n^b], [a]))^k\} = 0$$

wird, mit $X_n^b = X$ bzw. b für $(X, b) \leq$ bzw. $> n$. — Kapitel II beleuchtet vier Konvergenzarten der Folge (X_n) von Zufallselementen gegen ein Element X einzeln und in ihrem gegenseitigen Verhältnis. Die Konvergenz im k -ten Mittel: $\lim_{n \rightarrow \infty} ([X_n], [X]) = 0$, jene der Wahrscheinlichkeit nach:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\text{Prob}(X_n, X) > \varepsilon\} = 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

jene gemäß der Verteilungsgesetze und die fast sichere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\text{Prob}([X_n, X] < \varepsilon, [X_{n+1}, X] < \varepsilon, \dots)\} = 1 \text{ für alle } \varepsilon > 0.$$

— Kapitel III bringt dann als Verallgemeinerung des zweiten die Untersuchung der Zufallselemente $X(t)$ in Abhängigkeit von einem stetigen Parameter, d. h. der abstrakten Zufallsfunktionen, und skizziert den, nach Art der Konvergenz verschiedenen, Begriff ihrer Grenzfunktion und Stetigkeit. — Verf. betont die erreichte abstrakte Einstellung, Ref. unterstreicht die Sorgfältigkeit der ins Einzelne gehenden Darstellung.

Szentmártony (Budapest).

Gourevitch, Georges: Construction d'une loi de probabilité à partir d'une famille d'ensembles donnée. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 170—172 (1950).

Verf. stellt die folgende Aufgabe: Sei $0 \leq a \leq 1$ und jedem a eine Menge $P(a)$ aus einem R_k mit $P(a_1) \subset P(a_2)$ für $a_1 < a_2$ zugeordnet. Es soll eine Wahrscheinlichkeitsfunktion konstruiert werden, so daß $W\{M \in P(a)\} = a$ für jedes a und M ein zufälliger Punkt aus R_k . Das Problem wird zunächst für den R_1 gelöst, wenn die $P(a)$ Intervalle sind, deren Anfangspunkte $A(a)$ und Endpunkte $B(a)$ stetige, monoton ab- bzw. zunehmende Funktionen von a sind. Sei $A(0) = B(0)$. Offenbar kann man wegen der Voraussetzungen über A und B eine eindeutige Funktion $a(m)$ für die Punkte m des R_1 konstruieren. f und g seien positive Funktionen mit $f(a) + g(a) = a$ ($0 \leq a \leq 1$). Dann wird die gewünschte Wahrscheinlichkeitsfunktion geliefert durch

$$W\{M < m\} = f(1) - f(a(m)), \quad m \leq A(0); \quad W\{M < m\} = f(1) + g(a(m)), \quad m \geq B(0).$$

Nun wird der R_2 betrachtet, und die Mengen $P(a)$ sollen so beschaffen sein, daß ihre Durchschnitte mit den Parallelen zur Y -Achse die Voraussetzungen des vorhergehenden Falles realisieren. Damit ergibt sich die Möglichkeit, ausgehend von der Lösung für die Randverteilung das zweidimensionale Problem zu erledigen. Damit kann man schrittweise auch den Fall einer k -dimensionalen Verteilung behandeln. Für den Fall, daß $k = 2$ und $P(a)$ eine gewisse Schar einparametrischer Rechtecke ist, wird die Verteilungsfunktion explizit aufgestellt. *Schmetterer* (Wien).

Kolmogorov, A. N. und Ju. V. Prochorov: Über Summen einer zufälligen Anzahl zufälliger Veränderlicher. Uspechi mat. Nauk **4**, Nr. 4 (32), 168—172 (1949) [Russisch].

Aus der unendlichen Reihe ξ_1, ξ_2, \dots zufälliger Größen werde der Abschnitt $\xi_v = \xi_1 + \dots + \xi_v$ durch einen Sequenztest bestimmt. Es wird vorausgesetzt, daß für $n > m$ die Größe ξ_n unabhängig ist davon, daß $v = m$ ist. Es wird ein einfacher Beweis für die folgenden Theoreme vom Wald-Wolfowitzschen Typus gegeben:

Existieren $E(\xi_n) = a_n$ und $E(|\xi_n|) = c_n$ und ist $\sum_1^\infty P_n c_n$ konvergent bei

$$P_n = \sum_1^\infty p_m = \Pr\{v \geq n\}, \quad \text{so existiert } E(\xi_v) \text{ mit } E(\xi_v) = \sum_1^\infty p_n A_n \text{ bei}$$

$A_n = a_1 + \dots + a_n$. Sind die ξ_v ($v \geq 1$) voneinander unabhängige zweidimensionale aleatorische Größen $\xi_v = (\xi_v^1, \xi_v^2)$ und existieren

$$E(\xi_n^i) = a_n^i, \quad E((\xi_n^i - a_n^i)(\xi_n^j - a_n^j)) = b_n^{ij} \quad (i, j = 1, 2)$$

und konvergiert $\sum_1^\infty P_n \cdot (\sqrt{b_n^{11}} B_n^{22} + \sqrt{b_n^{22}} B_n^{11})$ mit $B_n^{ij} = b_1^{ij} + \dots + b_n^{ij}$, so ist

$$E((\xi_v^1 - A_v^1)(\xi_v^2 - A_v^2)) = \sum p_n B_n^{12} \text{ bei } A_n^i = a_1^i + \dots + a_n^i. \quad \text{Folgerung: Sind}$$

die ξ_n voneinander unabhängig mit existenten $E(\xi_n) = a_n$ und $E(\xi_n - a_n)^2 = b_n$

$$\text{und konvergiert } \sum P_n \sqrt{b_n B_n} \text{ bei } B_n = b_1 + \dots + b_n, \text{ so ist } E(\xi_v - A_v)^2 = \sum_1^\infty p_n B_n.$$

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Sulejmanova, Ch. R.: Stochastische Matrizen mit reellen charakteristischen Wurzeln. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 343—345 (1949) [Russisch].

Ableitung einiger Theoreme zur Frage, wann n gegebene Zahlen λ_k die Eigenwerte einer stochastischen (d. h. Zeilensummen gleich Eins) n -reihigen Matrix $\Phi = (\varphi_{ik})$ mit $\varphi_{ik} \geq 0$ ($\varphi_{ik} > 0$ für „positive“ stochastische Matrizen) sind. Aus einer elementaren Betrachtung der Abbildung der Eigenvektoren von Φ ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Φ , daß es ein $(n-1)$ -dimensionales Polyeder Q_{n-1} gibt, welches bei Anwendung der reellen Normalform von Φ auf ein P_{n-1} im Inneren von Q_{n-1} abgebildet wird. — Von den hieraus folgenden Theoremen seien genannt: (1) Gilt für die negativen unter den reellen

Zahlen λ_k mit $|\lambda_k| < 1$ die Ungleichheit $\sum |\lambda_i| < 1$, so gibt es stets ein Φ . — (2) Kommt unter den reellen λ_k mit $|\lambda_k| \leq 1$ die Zahl 1 k -mal, die Zahl -1 p -mal vor, so ist hinreichend für die Existenz eines Φ , daß gilt: $\alpha) k > p$; $\beta)$ die negativen unter den λ_k mit $|\lambda_k| < 1$ lassen sich so in $q \leq k - p$ Gruppen zusammenfassen, daß in jeder Gruppe die Summe der Absolutbeträge kleiner als 1 bleibt. Richter.

Sapogov, N. A.: Eine allgemeine Form des Grenzwertsatzes für unabhängige zufällige Vektoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 70, 765—768 (1950) [Russisch].

Eine Menge G des euklidischen R_m heißt Stetigkeitsmenge für eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(G)$, wenn $P(G^0) = P(G) = P(G)$, G^0 innerer Kern, G abgeschlossene Hülle von G . Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsfunktionen (Wf.) P_n heißt nach Verf. A -konvergent, gegen P , wenn $P_n(G) \rightarrow P(G)$ für jede Stetigkeitsmenge gilt. (Bei anderen Autoren wird dies als Konvergenz schlechthin von Wf. bezeichnet, z. B. A. Wintner, The Fourier transforms of probability distributions. Baltimore 1947, p. 4). $T = (t_1, \dots, t_m)$ sei ein Vektor, und $S_{T,x}$ bezeichne den

(offenen) Halbraum $\sum_{i=1}^m t_i x_i < x$. Satz 1: Für eine Folge von Wf. P_n und für jeden

Vektor $T \neq (0, \dots, 0)$ gelte für fast alle x $P_n(S_{T,x}) \rightarrow P(S_{T,x})$ mit $P(S_{T,x}) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$. Dann existiert eine Wf. P , so daß $A\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(G) = P(G)$. (Vgl.

Cramer-Wold, dies. Zbl. 15, 168.) — X sei ein zufälliger Vektor aus dem R_m , C ein beliebiger fester Vektor. $X^c = (x_1^c, \dots, x_m^c)$ bezeichne den zufälligen Vektor, für welchen $x_i^c = x_i$, wenn $|x_i| \leq c_i$ und $x_i^c = 0$, wenn $|x_i| > c_i$ ($i = 1, \dots, m$). Die Vektoren X_{nk} ($k = 1, \dots, k_n$) sollen gleichmäßig vernachlässigbar heißen für $n \rightarrow \infty$, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ die Wahl von n so möglich ist, daß $W\{|x_{nki}| > \varepsilon\} < \delta$ gleichmäßig in k und $i = 1, \dots, m$. — Satz 2: X_{n1}, \dots, X_{nk_n} sei eine Folge von Gruppen paarweise unabhängiger zufälliger Vektoren (offenbar mit $k_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$). Dafür, daß die Wf. des zufälligen Vektors

$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \rightarrow A_n$ [$A_n = (a_{n1}, \dots, a_{nm})$ ein beliebiger, fester Vektor] A -konvergiere gegen eine normale Wf., deren Mittelwerte verschwinden und welche eine gegebene zweite Momentenmatrix $\|b_{ij}\|$ besitzt, und daß X_{n1}, \dots, X_{nk_n} gleichmäßig vernachlässigbar für $n \rightarrow \infty$ seien, ist notwendig und hinreichend, daß ein Vektor $(\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{nm}) \rightarrow (0, \dots, 0)$ existiert, so daß

$$\sum_{k=1}^{k_n} W\{x_{nki} \neq x_{nki}^{\varepsilon_{ni}}\} \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{k_n} E(x_{nki}^{\varepsilon_{ni}}) - a_{ni} \rightarrow 0 \quad (i = 1, \dots, m) \text{ und}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} E\{[x_{nki}^{\varepsilon_{ni}} - E(x_{nki}^{\varepsilon_{ni}})][x_{nkj}^{\varepsilon_{nj}} - E(x_{nkj}^{\varepsilon_{nj}})]\} \rightarrow b_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

— Gestützt auf Satz 1 wird nun ein Satz, der ein Theorem von Khintchine verallgemeinert, aufgestellt. Satz 3: Die Vektoren X_{nk} seien gleichmäßig vernachlässigbar. (Bezeichnung des Satzes 2). Die Wf. von $\left(\sum_{k=1}^{k_n} x_{nk1}, \dots, \sum_{k=1}^{k_n} x_{nk m}\right)$ sei A -konvergent gegen eine Grenz-Wf. Diese ist genau dann normal, wenn $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| \geq \varepsilon} dF_{nki}(x) \rightarrow 0$ ($i = 1, \dots, m$) für jedes $\varepsilon > 0$, wobei $F_{nki}(x)$ die Verteilungsfunktion der Variablen x_{nki} ist. Schließlich verallgemeinert Verf. noch einen Satz seiner Arbeit [Doklady Akad. Nauk. SSSR 69, 15—18 (1949)]. Wiedergabe des umständlich zu formulierenden Ergebnisses muß unterbleiben. Keine Beweise.

Schmetterer (Wien).

Gnedenko, B. V.: Zum Lokalthemem für den normalen Anziehungsbereich stabiler Verteilungsgesetze. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 325—326 (1949) [Russisch].

Aus der Folge ξ_1, ξ_2, \dots unabhängiger zufälliger Größen mit der übereinstim-

menden Verteilungsfunktion $F(x)$ werden mit geeigneten reellen Konstanten A_n und $B_n > 0$ die normierten Summen $\sigma_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}$ gebildet so, daß die Verteilungsfunktion von σ_n für $n \rightarrow \infty$ der Grenzverteilung $\Phi(x)$ zustrebt. $F(x)$ gehört dann zum „Anziehungsbereich“ von $\Phi(x)$. Die ξ_i seien „gitterförmig“ verteilt; d. h. mit positiven Wahrscheinlichkeiten nur der Werte $a + nh$ mit ganzzahligen, jedoch nicht notwendig allen n fähig. $\Phi(x)$ ist dann eine stabile Verteilungsfunktion mit einer charakteristischen Funktion $\varphi(t)$ mit

$$\log \varphi(t) = i \gamma t - c |t|^\alpha \cdot \{1 + i \beta t/|t| \cdot \omega\} \quad \text{bei } 0 \leq \alpha \leq 2, \quad c > 0, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \\ \omega = \operatorname{tg} \pi \alpha / 2 \quad \text{für } \alpha \neq 1, \quad \omega = 2/\pi \log |t| \quad \text{für } \alpha = 1.$$

$F(x)$ gehört zum „normalen Anziehungsbereich“, wenn obige Konvergenz bei $B_n = a \cdot n^{1/\alpha}$ gilt. — Sei nun $p(x; \alpha, \beta, \gamma, c)$ die zu $\Phi(x)$ stets existente Wahrscheinlichkeitsdichte, dann gilt analog zum gewöhnlichen Grenzwertsatz sogar: $a n^{1/\alpha} h^{-1} \cdot \Pr \{ \xi_1 + \dots + \xi_n = n a + k h \} \rightarrow p(z_{nk}; \alpha, \beta, \gamma, c)$ gleichmäßig in k für $n \rightarrow \infty$ bei $z_{nk} = (k - A_n + n a)/a n^{1/\alpha}$, falls $F(x)$ zum normalen Anziehungsbereich von $\Phi(x)$ gehört und h maximal, d. h. nicht durch ein $h_1 > h$ ohne Verletzung der Ganzzahligkeit von n zu ersetzen ist. — Für den Beweis werden nur zwei elementare Hilfssätze angegeben und auf eine frühere Arbeit des Verf. [Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 3, 187 (1948)] verwiesen. Hans Richter (Haltingen).

Wold, H.: Sur les processus stationnaires ponctuels. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6.—3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 75—86 (1949).

Es seien $T_1 < T_2 < \dots < T_{h+1}$ willkürlich gegebene Zeitpunkte. Ferner sei $x(t)$ eine Funktion, die jedesmal um Eins zunimmt, wenn ein Ereignis eintritt. $z(t)$ ist 1 oder 0, je nachdem, ob (für gegebene Werte u_1, \dots, u_h)

$$x(T_2 + t) - x(T_1 + t) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1} + t) - x(T_h + t) \leq u_h$$

gilt oder nicht. Ein stationärer Punktprozeß ist dann durch die folgende Bedingung definiert: Für alle u_1, \dots, u_h gilt

$$(*) \quad \text{Prob} [x(T_2) - x(T_1) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1}) - x(T_h) \leq u_h] =$$

$$\text{Prob} [x(T_2 + T) - x(T_1 + T) \leq u_1, \dots, x(T_{h+1} + T) - x(T_h + T) \leq u_h].$$

Ein solcher Prozeß heißt uniform, wenn

$$(**) \quad \lim_{t_2 - t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt$$

für alle möglichen Abläufe mit der Wahrscheinlichkeit Eins denselben Wert hat. In diesem Falle ist für fast alle Abläufe der Wert (*) gleich dem Werte (**). Verf. behandelt insbesondere die „lokale Nachwirkung“. Diese liegt vor, wenn die Intensität des Eintretens eines Ereignisses von den Zeitintervallen zwischen früheren Ereignissen und zwischen dem letzten Ereignis und dem betrachteten Zeitpunkt abhängt. Die folgenden typischen Größen werden behandelt: (a) Wahrscheinlichkeit, daß auf ein Ereignis im Zeitpunkt t ein anderes im Intervall $(t, t + x)$ folgt, falls das letzte zur Zeit $t - y$ stattgefunden hat; (b) dasselbe, jedoch ohne die letztere Bedingung; (c) Wahrscheinlichkeit, daß ein Intervall der Länge T , das mit einem Ereignis beginnt, genau n Ereignisse enthält; (d) dasselbe, jedoch ohne die Bedingung, daß das Intervall mit einem Ereignis beginnen muß. Zwischen diesen Größen bestehen Zusammenhänge, die die Form von Integralgleichungen haben. Sie können für spezielle Annahmen betr. die grundlegenden Intensitäten gelöst werden, während für den allgemeinen Fall eine Stichprobenmethode zur Lösung angegeben wird. Als Beispiel für die Verwendbarkeit der Theorie wird vor allem das Gebiet des Telefonverkehrs erwähnt. Verallgemeinerungen und Einzelheiten werden für spätere Arbeiten in Aussicht gestellt. S. Vajda (Epsom, England).

Cernuschi, Félix and Louis Castagnetto: Probability schemes with contagion in space and time. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 122—127 (1947).

Verf. betrachten folgendes Urnenschema: N Urnen sind so angeordnet, daß jede von ihnen von m anderen Urnen umgeben ist. Jede von ihnen enthält eine endliche Anzahl schwarzer und weißer Kugeln. Die Anfangswahrscheinlichkeit, bei einer Zufallsentnahme eine weiße Kugel zu erhalten, ist für alle Urnen gleich. In diesem Schema soll einmal als Verkettungsvorschrift gelten: Werden aus den eine beliebig gewählte Urne umgebenden m Urnen l weiße und s schwarze Kugeln zufällig entnommen, so wird die Wahrscheinlichkeit, aus der zentralen Urne eine weiße Kugel zu entnehmen, mit dem Faktor $\alpha_{1,1}^l, \alpha_{1,2}^s$ multipliziert, nachdem zuvor dieser Urne eine weiße Kugel entnommen wurde, ergab dagegen diese Entnahme eine schwarze Kugel, so wird diese Wahrscheinlichkeit mit dem Faktor $\alpha_{2,1}^l, \alpha_{2,2}^s$ multipliziert. Es gilt dann für die Wahrscheinlichkeit, aus einer bestimmten Urne beim $i+1$ -ten Versuch eine weiße Kugel zu ziehen:

$$p_{i+1} = f(p_i) = p_i^2 (p_i \alpha_{1,1} + q_i \alpha_{1,2})^m + p_i q_i (p_i \alpha_{2,1} + q_i \alpha_{2,2})^m; (p_i + q_i = 1).$$

Eine zweite Verkettungsvorschrift sieht an Stelle der multiplikativen Änderung der Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel in der zentralen Urne eine Vermehrung der Anzahl der weißen Kugeln in ihr um $l w_1$ ($l w_2$) und der schwarzen Kugeln um $s b_1$ ($s b_2$) vor, wenn die aus ihr gezogene Kugel weiß (schwarz) war. In diesem Fall ergibt sich für p_{i+1}

$$p_{i+1} = p_i \int_0^1 t^{N_i - W_i - 1} \left[t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} t_1^{W_i} (p_i t_1^{w_1} + q_i t_2^{b_1})^m \right]_{t_1=t_2=t} dt \\ + (1 - p_i) \int_0^1 t^{N_i - W_i - 1} \left[t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} t_1^{W_i} (p_i t_1^{w_2} + q_i t_2^{b_2})^m \right]_{t_1=t_2=t} dt,$$

wobei W_i die Anzahl der weißen Kugeln und N_i die Gesamtzahl der Kugeln in der zentralen Urne vor dem i -ten Versuch sind. Für die Konvergenzpunkte der zu diesen Verkettungen in Zeit und Raum gehörenden Wahrscheinlichkeiten wird gezeigt, daß sie zwischen 0 und 1 gelegene Wurzeln der Gleichung $p = f(p)$ sind, während andere dieser Wurzeln Divergenzpunkte darstellen. Insbesondere gilt, daß, wenn ein Konvergenzpunkt zwei einfache Wurzeln zu Nachbarn hat, diese Divergenzpunkte sind.

Georg Friede (Göttingen).

Fortet, R.: Probabilité de perte d'un appel téléphonique, régime non stationnaire. Influence du temps d'orientation et du groupement des lignes. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13, (Lyon 28. 6.—3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 105—113 (1949).

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P , einen Anruf zu verlieren, weil die X Linien umfassende Selbstwählanlage besetzt ist, geht Verf. von folgenden Annahmen über die Verteilung der Anrufe, Sprech- und Wählzeiten aus: 1. Die Verteilung der unabhängig voneinander zufällig erfolgenden Anrufe entspricht einem Poissonschema mit dem Parameter a , das in der Zeit stationär ist; 2. die Verteilung der Sprechzeiten folgt einem Exponentialgesetz; 3. die Wählzeit ist konstant. Eine Anlage, für die diese Annahmen zutreffen, entspricht einem einfachen Markoffschen System, das praktisch sehr rasch gegen seinen stationären Zustand strebt. Während man daher bisher in erster Linie die Wahrscheinlichkeit P für den stationären Zustand zu bestimmen gesucht hat, untersucht Verf. diese für den nicht stationären Zustand. Nachdem er zunächst den Fall einer nur aus einer Linie bestehenden Anlage betrachtet hat, nimmt er zusätzlich an, daß die X Linien der Anlage in n Gruppen zu je x Linien unterteilt sind und jede dieser Gruppen durch einen Vorwähler ausgewählt wird. Während sich für $n = 1$ eine rechnerisch auswertbare exakte Formel für P ergibt, läßt sich für ein beliebiges $n \neq 1$ nur eine entsprechende Näherungsformel erhalten. — In der anschließend im Auszug wiedergegebenen Diskussion wird auf

eine Reihe zum Teil noch nicht veröffentlichter Arbeiten zu diesem Thema verweisen.

Georg Friede (Göttingen).

Feller, W.: On probability problems in the theory of counters. Studies Essays, pres. to R. Courant, 105—115 (1948).

Etant donnée une suite infinie d'événements dont les instants d'apparition se succèdent en obéissant à la loi de Poisson, on sait que si on appelle $M(t)$ et $B(t)$ le nombre moyen d'événements, et la variance de ce nombre d'événements, apparus pendant le laps de temps t , on a $B(t) = M(t)$. Si au lieu d'observer directement les apparitions on les enregistre avec un compteur présentant un temps mort τ , certains événements peuvent échapper à l'enregistrement, comme étant trop rapprochés de l'événement les précédant immédiatement. L'A. calcule $B(t)$ et $M(t)$ par des méthodes générales applicables aux problèmes où l'on a à sommer des variables aléatoires indépendantes, et se rattachant étroitement à la théorie des équations intégrales régissant les ensembles renouvelés. Les formules obtenues sont très simples. Elles permettent d'expliquer les „anomalies“ observées dans les décharges produites par les rayons cosmiques dans un compteur de Geiger-Müller. *Ville.*

Kolmogorov, A. N.: Lösung eines Problems aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, das mit der Frage nach dem Mechanismus der Schichtbildung zusammenhängt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 793—796 (1949) [Russisch].

Die Fragestellung der vorliegenden Arbeit ist beim statistischem Studium der Mächtigkeit der Schichten in geologischen Ablagerungen entstanden. Durch eine Aufeinanderfolge von Aufschüttungen und Abtragungen können Schichten mehrmals abgetragen werden oder auch z. B. gänzlich verschwinden. Wenn man nun annimmt, daß „im Mittel“ die Stärke der Aufwerfungen größer ist als die der Abtragungen, dann wird nach der Wahrscheinlichkeit der „endgültigen Form“ der Schichtungen und nach der Verteilung der Stärke der Schichten gefragt. $\delta_n = h_n - h_{n-1}$ sei die Differenz zwischen der Höhe der n -ten und $(n-1)$ -ten Schicht. Es wird vorausgesetzt, daß alle δ_n unabhängig gemäß $G(x) = \int_{-\infty}^x g(x) dx$ verteilt sind und der

Mittelwert $M = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$ existiert und > 0 ist. Sei $\zeta_n^{(r)} = \delta_n + \delta_{n+1} + \dots + \delta_{n+r}$ und $q_n = \inf(\zeta_n^{(0)}, \zeta_n^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(r)}, \dots)$. Wegen der stochastischen Konvergenz von $\zeta_n^{(r)} (n-1) \rightarrow M$ (Khintchine) ist q_n endlich und wird für irgendein r angenommen. Es handelt sich nun darum, $p = W(q_n > 0)$ zu bestimmen. $f(x)$ sei die

Dichte für die zufällige Variable q_n , also $p = \int_0^{+\infty} f(x) dx$. Dann hat man für die Dichte von q_n unter der Annahme $q_n > 0$ $f^*(x) = f(x)/p (x > 0)$, $f^*(x) = 0 (x < 0)$.

Mit der Bezeichnung $s(x) = f(x)/p$, also $p = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) dx$, zeigt Verf. das Theorem: $s(x) (-\infty < x < \infty)$ ist die einzige Lösung der Integralgleichung

$$(1) \quad s(x) = g(x) + \int_{-\infty}^0 g(x-y) s(y) dy.$$

Dies ergibt sich einerseits leicht aus der Bedeutung von q_n , andererseits sei

$$K_1(x, y) = g(x-y) (y < 0), K_1(x, y) = 0 (y > 0), K_r(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x, z) K_{r-1}(z, y) dz,$$

$$s_0(x) = g(x), s_r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_r(x, y) g(y) dy. \quad s(x) = \sum_0^{\infty} s_r(x) \text{ erfüllt formal (1). Verf.}$$

zeigt jedoch, daß aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen $\sum_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_r(x) dx$ kon-

vergiert ($s_r(x) \geq 0$). Für den Fall $g(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-(x-1)^2/2}$ werden f und f^* graphisch dargestellt. Schmetterer (Wien).

Wolffowitz, J.: The distribution of plane angles of contact. Quart. appl. Math. 7, 117—120 (1949).

Ein Teilchen A bewegt sich geradlinig in der (x, y) -Ebene mit der Geschwindigkeit k während des Zeitintervalls $0 \leq t \leq T$. Ein anderes Teilchen B bewegt sich in der gleichen Ebene geradlinig mit Einheitsgeschwindigkeit, wobei der Ort von B zur Zeit $t = 0$ in einem genügend großen Gebiet G um den Anfangsort von A einer Gleichverteilung genügt und auch die Richtung von B gleichverteilt ist. Der Radiusvektor R von A nach B schließe mit den Bewegungsrichtungen von A und B resp. die Winkel θ und Φ ein. Von einem Kontakt zwischen A und B wird gesprochen, wenn $R = \omega(\theta)$ ist, wo $R = \omega(\theta)$ eine ebene, einfache, konvexe Kurve in Polarkoordinaten definiert. θ und Φ im Zeitpunkt t des Kontaktes charakterisieren dem Typus des Kontaktes. Berechnet wird die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $f(\theta, \Phi)$ dafür, daß der Kontakt vom Typus (θ, Φ) war, wenn er in $0 \leq t \leq T$ eintrat. — Ergebnis: $f(\theta, \Phi) = c \cdot (D^* + |D^*|)$, wo

$$D^* = -\omega(\theta) \cos \Phi + \omega'(\theta) \sin \Phi + k \cdot [\omega(\theta) \cos \theta + \omega'(\theta) \sin \theta]$$

ist, und c durch $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \Phi) d\Phi d\theta = 1$ bestimmt wird. $f(\theta, \Phi)$ ist unabhängig von T , wenn G genügend groß ist. — Ist k statistisch verteilt in $k_1 \leq k \leq k_2$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $m(k)$, so ist $f(\theta, \Phi)$ zu ersetzen durch $\int_{k_1}^{k_2} f(\theta, \Phi) m(k) dk$

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Steinhaus, H.: Sur les fonctions indépendantes. VII. Un essaim de points à l'intérieur d'un cube. Studia math. 10, 1—20 (1948).

Die Elemente eines Schwarms von n Massenpunkten mit gleicher Masse sollen sich in einem würfelförmigen Gefäß bewegen. Und zwar in Abwesenheit von äußeren Kräften, als vollkommen elastische Körper, von irgendeiner Anfangslage mit arithmetisch unabhängigen Anfangsgeschwindigkeiten ausgehend. Verf. zeigt, daß die verhältnismäßige Verweilzeit des Massenmittelpunktes des Schwarmes in einer würfelförmigen Umgebung des Gefäßmittelpunktes durch das Laplace-Gaußsche Integral dargestellt wird bis auf einen Fehler, welcher mit $1/n$ gegen Null strebt. Es wird betont, daß diese statistische Feststellung in Kenntnis des Anfangszustandes und somit bei vollkommen bestimmten Elementenbahnen gemacht wurde.

Szentmártony (Budapest).

Erdős, P.: Remark on my paper „On a theorem of Hsu and Robbins“. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 21, 138 (1950).

Bezieht sich auf die in Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 286—291 (1949); dies. Zbl. 33, 290 veröffentlichte Arbeit des Verf.

Statistik:

Pinney, Edmund: Fitting curves with zero or infinite end points. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 127—131 (1947).

Es handelt sich um die Annäherung einer im Intervall $0 \leq x \leq 1$ gegebenen Funktion $y(x)$, die an einem Ende des Intervalls oder an beiden verschwinden oder unendlich werden kann und von der die sukzessiven Momente $\mu_m = \int_0^1 y x^m dx$ gegeben sind, durch eine Funktion

$$f(x) = x^\alpha (1-x)^\beta \sum_{p=0}^n a_p x^p, \Re(\alpha) > -1, \Re(\beta) > -1$$

derart, daß

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) x^m dx = \mu_m.$$

Bewiesen wird unter Benutzung von Entwicklungen nach Jacobischen Polynomen: Sind die Momente $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ gegeben und setzt man

$$S_p(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(p + \alpha + 1)}{\Gamma(p + \alpha + \beta + 1)} \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} \frac{\Gamma(m + p + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(m + \alpha + 1)} (-1)^m \mu_m,$$

$$a_k^{(n)} = \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \sum_{p=k}^n (2p + \alpha + \beta + 1) \frac{\Gamma(p + k + \alpha + \beta + 1)}{(p - k)! \Gamma(p + \beta + 1)} S_p(\alpha, \beta),$$

$$f(x) = x^\alpha (1 - x)^\beta \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k,$$

dann gilt (*) für $m = 0, 1, \dots, n$. Ist zusätzlich μ_{n+1} bekannt und ist $S_{n+1}(\alpha, \beta) = 0$, dann gilt (*) auch für $m = n + 1$. Ist darüber hinaus auch noch μ_{n+2} bekannt und ist $S_{n+2}(\alpha, \beta) = 0$, dann gilt (*) auch für $m = n + 2$. — Ist beispielsweise $f(0) = 0$ oder ∞ und $f(1) = 0$ oder ∞ , dann werden α und β aus den Gleichungen $S_{n+1}(\alpha, \beta) = 0$ und $S_{n+2}(\alpha, \beta) = 0$ bestimmt. n ist dabei um 3 kleiner als die Anzahl der gegebenen Momente. *Günther Schulz* (Aachen).

Risser, R.: Essai sur les courbes de distribution statistique. Bull. Assoc. Actuaire Belges **54**, 41—72 (1948).

Die Approximation der Verteilungskurven durch Züge von kleinen Parabelbögen führt bei exhaustiven Ziehungen (ohne Rückgabe der gezogenen Kugel in die Urne) zu Differentialgleichungen der Form $y' = y \cdot P_3(x)/P_4(x)$, wo P_3 und P_4 Polynome 3. bzw. 4. Grades sind, P_3 ohne quadratisches Glied. Verf. diskutiert eingehend die Kurven, die sich in den verschiedenen Fällen dieser Verteilung und der durch $y' = y \cdot x/P_4(x)$ bzw. $y' = y \cdot (a_0 + x)/P_4(x)$ dargestellten Verteilungen ergeben. *Härten* (München).

Weydanz, W.: Der mittlere Fehler bei der Mittelwertbildung aus Wertgruppen. Z. angew. Math. Mech. **29**, 188—190 (1949).

Angabe einer Formel für den mittleren Fehler bei gruppenweiser Auswertung und kurze Andeutung des Beweises. — Die Formel ist eine triviale Anwendung eines Steinerschen Satzes über das Trägheitsmoment eines Systems von Massenpunkten. Interpretiert man nämlich die Meßwerte als die Punkte einer Geraden und ihre Gewichte als Massen, so ist das Quadrat des mittleren Fehlers gleich dem Trägheitsmoment des Punktsystems, bezogen auf den Schwerpunkt und dividiert durch die Gesamtmasse und die um Eins verminderte Anzahl aller Punkte. Nach Steiner ist das Trägheitsmoment gleich der Summe der analogen Gruppenträgheitsmomente, vermehrt um das Trägheitsmoment des Systems der Gruppenschwerpunkte mit den darin kondensierten Gruppenmassen. *H. Bückner* (Minden).

Cohen jr., A. C.: On estimating the mean and standard deviation of truncated normal distributions. J. Amer. statist. Assoc. **44**, 518—525 (1949).

K. Pearson und **A. Lee** [„On the generalized probable error in multiple normal correlation“, Biometrika, Cambridge **6**, 59—68 (1908) oder auch K. Pearson, Tables for statisticians and biometricians, Part. I, 3. Aufl., S. XXVIII ff.] haben ein Verfahren ersonnen, um Schätzfunktionen für Mittelwert und Streuung einer Normalverteilung zu gewinnen, wenn die Einzelergebnisse der Stichprobe gemäß der Natur des Experimentes z. B. nicht unterhalb einer Schranke x_0 liegen können. Später hat **R. A. Fisher** [„Properties and applications of h functions“, Introduction to Mathematical Tables **1**, British Ass. Advanc. Sci. **1931**, XXVI—XXXV] gezeigt, daß man an Stelle der von Pearson und Lee verwendeten Methode der Momente auch das Prinzip der maximum likelihood [vgl. J. Neyman and Elizabeth L. Scott, Econometrica, Menasha, **16**, 1—22 (1948)] mit demselben Erfolg heranziehen kann.

Sowohl Fisher als auch Pearson haben diesbezügliche Tabellen konstruiert. Vert behandelt nun das Problem in einer Weise, welche nur Tafeln für das Gaußsche Fehlerintegral und die Dichte der Normalverteilung benötigt. Die Methode wird auch an einem numerischen Beispiel erläutert. Schließlich werden Ausdrücke für die Streuungen zweier hier gebrauchter Schätzfunktionen und für den Korrelationskoeffizienten aufgestellt.

Schmetterer (Wien).

Nanda, D. N.: Limiting distribution of a root of a determinantal equation. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 19, 340—350 (1948).

Etant données p variables aléatoires normales, si deux séries de n_1 et n_2 expériences ont conduit aux deux matrices empiriques de corrélation S et S^* , l'équation $|A - \theta(A + B)| = 0$, où $A = n_1 S$, $B = n_2 S^*$, admet $l (= \min(p, n_1))$ racines. Ces racines sont des variables aléatoires dont la distribution jointe a été donnée par Hsu en 1939 [Ann. Eugenics 3, 250—258 (1939); ce Zbl. 22, 245]. L'A. donne une méthode pour calculer la forme limite de cette distribution quand n_1 et n_2 tendent vers l'infini. Il calcule la distribution de la plus grande racine et de la plus petite racine pour $l = 2$ et $l = 3$.

Ville (Paris).

Kendall, M. G.: Rank and product-moment correlation. Biometrika, Cambridge 36, 177—193 (1949).

Für die Erwartungswerte $E(t)$ und $E(r_s)$ des Kendallschen bzw. Spearman'schen Rangkorrelationskoeffizienten und das Streuungsquadrat $\text{var}(t)$ in Zufallsstichproben vom Umfang n aus einer Normalverteilung in den beiden Variablen x und y und dem Korrelationskoeffizienten ρ der Ausgangsverteilung bestehen von Greiner, Moran und Esscher angegebene Beziehungen [s. M. G. Kendall: „Rank Correlations Methods“; dies. Zbl. 32, 176; P. A. P. Moran; dies. Zbl. 31, 171]. In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. entsprechende Beziehungen für den Fall an, daß die Ausgangsverteilung nicht normal, sondern durch eine Gram-Charliersche Reihe in zwei Variablen gegeben ist. Der Versuch, eine Beziehung zwischen $\text{var}(r_s)$ und ρ herzustellen, führt auf nicht elementare transzendente Funktionen, es läßt sich jedoch für $\text{var}(r_s)$ eine Reihenentwicklung nach Potenzen von ρ angeben. — Die gewonnenen Beziehungen für $E(t)$ und $E(r_s)$ geben Anlaß zu einer an Beispielen geführten Untersuchung der Frage, ob sich die aus einer in Form einer $m \times n$ Tabelle gegebenen Zufallsstichprobe berechneten Werte von t bzw. r_s zur Schätzung des Korrelationskoeffizienten ρ der Ausgangsverteilung selbst im nicht normalen Fall eignen.

Georg Friede (Göttingen).

Quenouille, M. H.: The joint distribution of serial correlation coefficients. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 561—571 (1949).

Es handelt sich, wie in zwei anderen Arbeiten desselben Verf. (dies. Zbl. 33, 389), um die gleitenden Korrelationskoeffizienten einer Reihe (Reihen-Korrelationskoeffizienten) mit periodisch sich wiederholenden „Fehlern“, und zwar diesmal um die Korrelationskoeffizienten, die man erhält, wenn man die in verschiedenen, bei jeder Einzelrechnung jedoch gleichen, Intervallen aufeinander folgenden Elemente einer Reihe korreliert. In der Regel werden diese Koeffizienten eine statistische Gesamtheit bilden, so daß die Frage nach einer gemeinsamen Verteilungsfunktion auftaucht. Diese Funktion wird mittels einer Erweiterung einer Methode von Koopmans hergeleitet, und es wird gezeigt, daß die Verteilung Eigenschaften besitzt, die ähnlich sind den Eigenschaften der Verteilung eines einzelnen gleitenden Korrelationskoeffizienten. Da die gefundene Formel für die Zwecke der Rechnung wenig geeignet ist, werden Näherungsformeln untersucht, und für große Stichproben die Verwendbarkeit des gewöhnlichen partiellen Korrelationskoeffizienten dargetan.

Paul Lorenz (Berlin).

Kendall, M. G.: Tables of autoregressive series. Biometrika, Cambridge 36, 267—289 (1950).

Tables of up to 500 terms of autoregressive series were calculated from

$$u_{t+2} + a u_{t+1} + b u_t = \varepsilon_{t+2} \text{ or } u_{t+1} + c u_t = \varepsilon_{t+1}$$

with certain values of a , b and c . The random element was mostly rectangular or normal, but in some of the second order series the values of series of the first order were used. Serial covariances and serial correlations are also given for most of the series.

S. Vajda (Epsom, England).

Delaporte, Pierre: Une condition nécessaire que les observations doivent remplir pour être représentables par un schéma d'analyse factorielle de Spearman. *C. r. Acad. Sci., Paris* **229**, 973—975 (1949).

Wenn sehr viele Gruppenfaktoren existieren, versagen die von Verf. früher [*C. r. Acad. Sci., Paris* **222**, 525 (1946)] angegebenen Näherungen für die Korrelationskoeffizienten zwischen Merkmalen und dem Generalfaktor. Verf. erweitert jetzt das frühere Kriterium entsprechend und führt die Anwendung auf den neuen Fall durch.

Härten (München).

Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Ottaviani, Giuseppe: Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. 6, 679—685 (1949).

Die Cantellische Theorie der Deckungskapitalien wird unter allgemeineren Voraussetzungen begründet: jede Differenzierbarkeits- oder Stetigkeitsannahme wird fallen gelassen, so daß die Ausgangswahrscheinlichkeiten, Prämiensummenfunktionen usw., nur monotone Funktionen (bzw., unter geeigneten Begriffserweiterungen, Funktionen mit beschränkter Schwankung) zu sein brauchen. Es genügt im wesentlichen, zu Stieltjesschen Integrale überzugehen: nur der Fall, daß mehrere Ausgangswahrscheinlichkeiten in demselben Punkt unstetig sind, verlangt weitere Betrachtungen.

Bruno de Finetti (Trieste).

Jecklin, Heinrich: La notion de vie moyenne et sa portée pratique. *Bull. Assoc. Actuaires Belges* **54**, 23—39 (1948).

Im ersten Teil der Arbeit zeigt Verf., wie sich mit Hilfe der mittleren Lebenserwartung einfache Formeln für die Reserven der laufenden Leibrenten, der aufgeschobenen Leibrenten und der Todesfallversicherungen bei einer stationären Gesamtheit ergeben. Im zweiten Teil verwendet er den Begriff der „temporären mittleren Lebenserwartung“ (= Barwert der abgekürzten Leibrente zum Zinsfuß 0), um aus einer Anwendung einer Ungleichung von Tschebyscheff und aus der verallgemeinerten Approximationsformel von Lidstone gute Approximationsformeln für die Nettoprämie der gemischten Versicherung abzuleiten, in denen neben der temporären mittleren Lebenserwartung nur Ausdrücke erscheinen, die von der Sterblichkeit unabhängig sind.

Härten (München).

Steller, E.: Quelques remarques tendant à simplifier l'essai de M. Consael. *Bull. Assoc. Actuaires Belges* **55**, 67—70 (1949).

Verf. bemerkt, daß die in R. Consael, „Les propriétés fondamentales des systèmes d'assurances sociales“ (*Bull. Assoc. Actuaires Belges*) unterschiedenen drei Fälle mit Hilfe der Transformationen $x = z - \tau$ aufeinander zurückgeführt werden können, und gibt eine Formel für die Rentenanswartschaften.

Härten (München).

Hickman, W. Braddock: The determinant of absolute prices in classical economic theory. *Econometrica*, Chicago **18**, 9—20 (1950).

Patinkin (dies. Zbl. **33**, 200) setzt in seinem Satz, aus dem er die Inkonsistenz des Casselschen Systems der klassischen Nationalökonomie ableitet, stillschweigend voraus, daß die klassischen Nachfrage- und Angebotsfunktionen unabhängig sind. Verf. zeigt, daß die Konsistenzforderung ein unabhängiges Axiom der klassischen

Theorie ist; die Forderung der Unabhängigkeit ist dagegen wirtschaftlich nicht begründet, die einfachsten Modelle zeigen vielmehr Abhängigkeit der Nachfrageexzeßgleichungen. Auch Patinkins Argumentierung, die Cambridge-Gleichung, durch welche geldwirtschaftlich absolute Preise eingeführt werden, sei mit der Homogenitätsforderung nicht verträglich, gehe fehl, weil die Cambridge-Gleichung keine Identität, sondern eine Bedingungs-gleichung ist. — Verf. zeigt schließlich, daß auch Konsistenz und nichtlineare Abhängigkeit verträglich und in nichttrivialen Fällen verwirklicht sind. *Härten (München).*

Leontief, Wassily: The consistency of the classical theory of money and prices. *Econometrica*, Chicago 18, 21—24 (1950).

Die von Patinkin (s. vorsteh. Referat) stillschweigend vorausgesetzte Unabhängigkeit der klassischen Angebot- und Nachfragefunktionen besteht nicht, wie Verf. daran zeigt, daß jede der $2n - 2$ Gleichungen für Waren aus den $2n - 3$ anderen abgeleitet werden kann, weil nach der klassischen Theorie Waren und Dienste nur soweit angeboten werden, wie die eigene Nachfrage erfordert, also Gleichgewicht im Warenssektor besteht. *Härten (München).*

Phipps, Cecil G.: A note on Patinkin's „relative Prices“. *Econometrica*, Chicago 18, 25—26 (1950).

In einer Arbeit von Patinkin (dies. Zbl. 34, 82) war dieser von den Voraussetzungen ausgegangen, daß 1. völlig freier Wettbewerb („perfect competition“) bestehe, worin unbeschränkte Handelsfreiheit eingeschlossen ist, und daß 2. der Einzelne den höchsten Nutzen erstrebe. Verf. leitet daraus ab, daß der relative Preis einer Ware Null sei, wenn sie keinen Grenznutzen hat, und umgekehrt. Patinkin führe dann das Geld in sein System ein, von dem man keinen (direkten) Nutzen habe und das deshalb auch nicht in die Nutzenfunktion eingehe. Trotzdem setze er den Preis des Geldes relativ zu nützlichen Gütern gleich 1. Daraus folge die Inkonsistenz, die Patinkin im klassischen System finde. *Härten (München).*

Arrow, Kenneth J.: Homogeneous systems in mathematical economics: a comment. *Econometrica*, Chicago 18, 60—62 (1950).

G. Tintner (dies. Zbl. 33, 295) hat seine Sätze über homogene Funktionen unter der Voraussetzung zweimaliger Differenzierbarkeit abgeleitet. Diese Voraussetzung erscheint ökonomisch bedeutungslos. Verf. beweist Tintners Theoreme 5 und 6 ohne sie. Tintners Vermutung ist deshalb nicht zutreffend, mangelnde Homogenität beruhe darauf, daß die Differenzierbarkeitsforderung nicht erfüllt ist. *Härten.*

Geometrie.

Grundlagen:

Menger, Karl: Independent self-dual postulates in projective geometry. *Rep. math. Colloqu.*, Indiana, II. S. 8, 81—87 (1948).

Es wird ein Axiomensystem für die projektive Ebene angegeben, das in sich dual ist, d. h. zu jedem Axiom auch die duale Aussage enthält, aber so, daß trotzdem keines der Axiome eine Folge der übrigen ist. Die Mengerschen Postulate lauten: I'. Zwei verschiedene Punkte inzidieren wenigstens mit einer Geraden. I''. Zwei verschiedene Geraden inzidieren wenigstens mit einem Punkte. II. Zwei verschiedene Punkte und zwei verschiedene Geraden derart, daß beide Punkte mit beiden Geraden inzidieren, gibt es nicht. III. Es gibt zwei Punkte P_1, P_2 und zwei Geraden g_1, g_2 , so daß zwar P_i mit g_i inzidiert für $i = 1, 2$, aber weder P_1 mit g_2 noch P_2 mit g_1 . IV. Es gibt zwei verschiedene Geraden g_1, g_2 und zwei verschiedene nicht mit ihnen inzidierende Punkte P_1, P_2 derart, daß die Verbindungsgerade von P_1, P_2 mit dem Schnittpunkt von g_1, g_2 inzidiert. — Diese Postulate sind mit den üblichen Inzidenzaxiomen der projektiven Ebene äquivalent. III und IV lassen sich durch eine einzige Aussage ersetzen. — Auch die Sätze von Desargues und Pappos

werden in eine Form gebracht, die zu sich selbst dual ist. — Schließlich wird auch für die räumliche projektive Geometrie ein in sich duales Axiomensystem beschrieben.

Sperner (Bonn).

Menger, Karl: Self-dual fragments of the ordinary plane. Amer. math. Monthly 56, 545—546 (1949).

Nimmt man aus der projektiven Ebene nicht nur eine Gerade g_∞ und alle mit ihr inzidierenden Punkte, sondern auch einen Punkt P_∞ und alle mit ihm inzidierenden Geraden heraus (wobei P_∞ mit g_∞ inzident sein darf oder nicht), so bleibt in der Restmenge der Punkte und Geraden das Dualitätsprinzip hinsichtlich Inzidenz und Parallelismus gültig. Einem „parallelen“ Geradenpaar dieser Restmenge tritt nämlich als duale Figur ein Punktepaar gegenüber, dessen Verbindungsgerade durch P_∞ geht. Es wird dargetan, wie durch geeignete Wahl der Punkt- und Geradenkoordinaten diese Dualität auch analytisch augenfällig gemacht werden kann.

Sperner (Bonn).

Elementargeometrie:

•Schläfli, Ludwig: Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band I. — Herausgegeben vom Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforsch.-Ges. Basel: Verlag Birkhäuser 1949. 392 S. mit einem Porträt von Ludwig Schläfli. Ganzleinen Fr. 54.—.

Daß Ludwig Schläfli (1814—1895) zu den bedeutenden und vielseitigen Mathematikern des 19. Jahrhunderts gehörte, der zudem — darin etwa Dedekind oder Grassmann vergleichbar — seiner Zeit weit voraus war, ist aus mehreren Gründen erst verhältnismäßig spät erkannt worden. Insbesondere war das Schicksal seiner zweiten großen Jugendarbeit, der „Theorie der vielfachen Kontinuität“ symptomatisch für diese Beurteilung wie für die äußeren Schwierigkeiten, mit denen Schläfli bis in die fünfziger Jahre seines Lebens zu kämpfen hatte. Da auch heute noch von Schläflis Werk vielfach der Eindruck vorherrscht, als handle es sich um verstreute — wenn auch hochstehende — Einzelleistungen, entspricht die Herausgabe seiner gesammelten mathematischen Arbeiten, die die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft veranstaltet, einem sehr dringenden Erfordernis. Denn erst die vollständige Ausgabe der gesammelten Abhandlungen wird uns einen zutreffenden Eindruck von der Gesamtleistung Schläflis vermitteln können. — Der wichtigste Beitrag zu dem vorliegenden ersten Band des Sammelwerkes ist die genannte ausführliche Untersuchung unter dem Titel: Theorie der vielfachen Kontinuität; sie umfaßt mit etwa 230 Seiten mehr als die Hälfte des Bandes. Bei der Betrachtung des ersten Teils, der Lehre von den linearen Kontinuen, bemerkt man sofort eine — von Einzelheiten der Bezeichnung abgesehen — durchaus moderne Behandlung der linearen Objekte des R_3 ; der Hochschullehrer, der heute seine Vorlesung über analytische Geometrie etwa nach der Art des neuen Buches von E. Sperner n -dimensional anlegt, findet hier eine Fülle von Anregungen für Übungsbeispiele, die besonders geeignet sind, um den völlig konkreten, jeder Willkür entzogenen Charakter der n -dimensionalen Geometrie durch zahlreiche Konstruktionen zu erhärten. In dieser Richtung der Objektivierung mehrdimensionaler Strukturen liegt der stärkste Eindruck, den ein aufmerksamer Leser von der Methodik des ersten Teils gewinnt; es bedarf in der Tat solcher Verfahren, um etwa zu der Einsicht zu gelangen, daß die 6 regulären vierdimensionalen Vielzelle, die Schläfli als erster bestimmt und konstruiert hat, nicht „weniger real“ sind als ihre 5 dreidimensionalen Analoga. Mit der vollständigen Diskussion und Konstruktion der n -dimensionalen regulären Polytope erreicht Schläfli ein Ziel, das als Abschluß einer mit der früheren griechischen Mathematik anhebenden Entwicklung aufzufassen ist. Die historische Parallele zu den Untersuchungen über die Unlösbarkeit griechischer Konstruktionsaufgaben liegt auf der Hand. — Im zweiten Teil der vielfachen Kontinuität untersucht Schläfli die Hyper-

flächeninhalte der auf der Sphäre $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ liegenden, von n durch den Ursprung gehenden

Hyperebenen begrenzten, $(n-1)$ -dimensionalen sphärischen Simplexes \mathcal{S}_n . Für $n=3$ handelt es sich um den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks, für $n=4$ um das Volumen des sphärischen Tetraeders, das die Mathematiker von Gauß bis heute angezogen hat. Der Inhalt S_n von \mathcal{S}_n kann bei passender Orientierung als Funktion der $n(n-1)/2$ Winkel zwischen je zwei Hyperebenen aufgefaßt werden. Für S_n gilt eine Art differentieller Rekursionsformel: Bezeichnet θ_{ik} ($i \neq k$) den Winkel zwischen der i -ten und der k -ten Hyperebene, $\mathcal{S}_{n-2}(i, k)$ das zu θ_{ik} homologe Randsimplex, welches von jenen Hyperebenen in \mathcal{S}_n ausgeschnitten wird, so drückt sich das Verhalten von \mathcal{S}_n bei infinitesimalen Änderungen der θ_{ik} durch

$$(1) \quad (n-2) dS_n = \sum_{1 \leq i < k \leq n} S_{n-2}(i, k) d\theta_{ik}$$

aus. (1) muß als tiefliegende Verallgemeinerung einer für sphärische Dreiecke wohlbekannten Inhaltsrelation angesehen werden $[S_1(i, k) = 1 \text{ für } n = 3]$. — Die Schläflische Inhaltsfunktion $f_n = f_n(\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \dots, \vartheta_{ik}, \dots, \vartheta_{n-1, n})$ unterscheidet sich von S_n um einen nur von n abhängigen Faktor und ist so normiert, daß $f_n = 1$ wird, wenn alle ϑ_{ik} den Wert $\pi/2$ annehmen. Für die f_n gilt die folgende bemerkenswerte Rekursionsformel: Man ersetze n durch $2n+1$, betrachte die von $2n+1-2m$ der obigen Hyperebenen ausgeschnittenen Randsimplizes \mathfrak{S}_{2m} und bilde $\sum f_{2m}$ über die sämtlichen Kombinationen der $2n+1-2m$ Hyperebenen bei festem m . Dann gilt

$$(2) \quad f_{2n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \lambda_j B_{j+1} \sum f_{2n-2j} \quad (f_0 = 1)$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{j+1} und elementaren positiven λ_j . Daß eine analoge Darstellung für die f_{2n} nicht besteht, ist im Sonderfall $2n = 4$ des sphärischen Tetraeders bekannt und hängt mit der Tatsache zusammen, daß das Analogon des Eulerschen Polyedersatzes in den R_{2n} eine homogene lineare Relation zwischen den Stückzahlen ist. — Eine besonders wichtige Stellung unter den Simplizes \mathfrak{S}_n nehmen die simplizialen Rechtflache ein; bei ihnen sind $(n-1)(n-2)/2$ der ϑ_{ik} gleich $\pi/2$ ($i < k$), so daß hier f_n nur von den $n-1$ übrigen ϑ_{ik} abhängt. Schläfli zeigt durch eine ausführliche Diskussion, daß sich jedes sphärische Simplex als algebraische Summe simplizialer Rechtflache darstellen läßt, wobei in der Summe nur Pluszeichen auftreten, wenn das Ausgangssimplex lauter spitze Winkel hat. Für die f_{2n+1} gilt im Falle eines Rechtflachs eine gegenüber (2) vereinfachte Rekursionsformel. Diese sowie einige für gerade Indizes $2m$ zwischen den f_{2m} der simplizialen Rechtflache bestehende Symmetrieregeln gestatten schließlich die Bestimmung konkreter Werte f_n für simpliziale Rechtflache, falls die noch freien $n-1$ Argumente von f_n gewisse rationale Vielfache von π sind oder ganz-linear mit solchen Zahlen als Koeffizienten von einem Parameter λ abhängen. Eine anscheinliche Zahl solcher Formeln ergibt sich insbesondere für $n = 4$; in allen Fällen sind die so gefundenen f -Werte rational oder ganz-linear mit rationalen Koeffizienten in λ . — Gegen Ende des zweiten Teils wendet sich Schläfli den Inhaltsfunktionen der sphärischen Polytope zu, für die er einige Verallgemeinerungen der oben zitierten Sätze beweist. Ausführlich wird dabei das dem 600-Zell des euklidischen R_4 entsprechende dreidimensionale sphärische Polyeder untersucht. Am Schluß erscheint der neue Begriff der Eutaxie, auf den sich ein Satz von der Quadratsumme der Projektionen eines Strahls auf die Eckpunktradien eines regulären Polytops bezieht. Mit Aussagen dieser Art schließt der zweite Teil. — Über den Inhalt des dritten Teils kann hier nur stichwortartig referiert werden. Zunächst behandelt Schläfli die Hyperflächen zweiten Grades, wobei sich die algebraische Definition der konjugierten Halbmesser, der Satz vom Trägheitsindex, die Klasseneinteilung nach den Berührungsarten der Tangentialhyperebenen und bemerkenswerte Aussagen über die projektiven Koordinaten höherer Stufe für die Systeme der Endpunkte von m unter allen n konjugierten Halbmessern ergeben. Es folgen geometrische Sätze über konfokale Hyperflächen zweiten Grades; daß sie orthogonal sind und daß sich orthogonale Hyperflächen stets in Krümmungslinien schneiden, wird hier in voller Allgemeinheit erkannt. Diese und weitere Sätze lassen sich, wie gezeigt wird, aus der Betrachtung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung für Hyperflächen höheren Grades ableiten. Eine graphische Konstruktion für die Systeme orthogonaler Flächen im R_3 beruht wesentlich auf den Eigenschaften der Differentialgleichung dritter Ordnung, der diese Systeme genügen. Die letzten Abschnitte der „Kontinuität“ beziehen sich auf die Bestimmung des Inhalts des zwischen n konfokalen quadratischen Hyperflächen gelegenen Raumstücks im R_n , der geodätischen Verbindung auf dem Durchschnitt konfokaler Hyperflächen, der Wirkung des Laplaceschen Differentialoperators und in Verbindung damit der Potentiale verschiedener Körper und Massenverteilungen. — Der vorliegende Band enthält neben kleineren geometrischen Arbeiten noch die Untersuchungen Schläflis über höhere Bernoullische Zahlen und über die Begründung der Theorie der elliptischen Funktionen durch unendliche Doppelprodukte, denen man heute vom Standpunkt der analytischen Theorie der Partitionen verschiedenster Art eine besondere Bedeutung beimessen muß.

Petersson (Hamburg).

Thébault, Victor: Sphères associées à un polygone gauche dont les sommets sont cosphériques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 271—273 (1950).

Es sei eine Kugel K vorgegeben. Man konstruiere, von einer beliebigen K berührenden Kugel K_1 ausgehend, eine Kette von K berührenden Kugeln K_2, \dots, K_{2n} , so daß jede Kugel auch die vorige berühre. Es wird gezeigt, daß K_{2n} dann und nur dann K_1 berührt, wenn $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4 \dots P_{2n-1} P_{2n}} = \overline{P_2 P_3 P_4 P_5 \dots P_{2n} P_1}$ ausfällt, wobei P_i den Berührungspunkt von K_i und K bedeutet. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Kreisschließungssatzes von Lucas. L. Fejes Tóth (Veszprém).

Thébault, Victor: Sur des points de Gergonne et de Nagel d'un tétraèdre. Math. Gaz., London **33**, 270—272 (1949).

Verf. sucht solche Punkte eines Tetraeders zu bestimmen, die Eigenschaften besitzen, die denen der Punkte von Gergonne und Nagel im Dreieck vergleichbar sind. Je nach den Definitionen dieser Punkte, die man zum Vergleich heranzieht, erhält man mehrere Punkte im Tetraeder, die jenen Punkten des Dreiecks entsprechen. — Dem Gergonneschen Punkt vergleichbar ist der zweite Lemoinesche Punkt $L_1 \equiv I'$ des Tetraeders T_1 , dessen Ecken die Berührungspunkte der Inkugel des Grundtetraeders $T \equiv ABCD$ mit den Flächen BCD, CDA, DAB, ABC sind. Die Analogie besteht darin, daß die baryzentrischen Koordinaten von I' bezüglich T den Tangenten der Winkel proportional sind, die die Geraden AJ, BJ, CJ, DJ (J Inkreismittelpunkt) mit den anliegenden Flächen der Trieder $(A), (B), (C), (D)$ bilden. — Der reziproke Punkt N des Punktes I' kann dem Nagelschen Punkt im Dreieck verglichen werden. — Ein anderer Nagelscher Punkt ist der Mittelpunkt N' der Inkugel des antikomplementären Tetraeders, insofern als sich in ihm die Geraden AA', BB', CC', DD' schneiden, die die Ecken mit den Punkten A', B', C', D' der Gegenflächen verbinden, für die die Flächeninhaltsbeziehungen

$$CDA + CDA' = DBA + DBA' = BCA + BCA' = \frac{1}{3} (A + B + C + D), \dots$$

bestehen (A, B, C, D die Inhalte der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC).

Zacharias (Quedlinburg).

Blanchard, René, Robert Bouvaist et Victor Thébault: Surfaces cubiques associées à un tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 950—952 (1948).

Es seien $ABCD$ ein Tetraeder und A', B', C', D' die Fußpunkte der von einem Punkt P auf die Seitenflächen gefälltten Lote. Der Ort der Punkte P , für die A', B', C', D' komplanar sind, ist eine von Steiner und Cayley eingeführte Fläche dritter Ordnung, die in einem gewissen Sinn die Rolle des Umkreises eines Dreiecks übernimmt. Es werden mehrere Sätze bezüglich dieser Fläche hergeleitet, von denen folgender genannt sei: Die Tangentialebenen der genannten Fläche in A, B, C, D bestimmen ein Tetraeder $A^*B^*C^*D^*$, wobei AA^*, BB^*, CC^*, DD^* im ersten Lemoineschen Punkt sich schneiden.

L. Fejes Tóth (Veszprém, Ungarn).

Bouvaist, Robert et Victor Thébault: Cubiques gauches et points remarquables associés au tétraèdre. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1689—1691 (1949).

Betrachten wir die von einem Punkt P auf die Seitenfläche A eines Tetraeders gefälltten Lote. Die Schnittpunkte derselben mit den Seitenflächen A, B, C, D seien A_A, B_A, C_A, D_A . Die Punkte A_B, B_B, \dots, D_D haben ähnliche Bedeutung. Es wird der Ort derjenigen Punkte P untersucht, für die die drei Tetraeder $A_D B_A C_B D_C, A_C B_D C_A D_B, A_B B_C C_D D_A$ inhaltsgleich sind. Es wird u. a. gezeigt, daß der betrachtete geometrische Ort eine Raumkurve dritter Ordnung ist, die im Falle eines orthozentrischen Tetraeders den Schwerpunkt enthält.

L. Fejes Tóth.

Scott, S. A.: On an approximate construction for a regular polygon. Edinburgh math. Notes **37**, 25 (1949).

Schmitz, Josef: Der Umkreis des Dreiecks als geometrischer Ort für die Schnittpunkte der gespiegelten Dreieckshöhen. Math.-phys. Semesterber., Göttingen **1**, 304 (1950).

Nehring, O.: Über ähnliche, seitengebundene Dreiecke. Math.-phys. Semesterber., Göttingen **1**, 305—308 (1950).

Walsh, C. E.: The equal internal bisectors theorem. Edinburgh math. Notes **37**, 22—23 (1949).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

●Love, Clyde E.: Elements of analytic geometry. — 3rd edition. New York: The Macmillan Company 1950.

●**Bol, Gerrit: Elemente der analytischen Geometrie. II.** (Studia Mathematica Bd. V). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1949. 156 S. 23 Fig. geh. 8.80 DM, geb. 10,50 DM.

Trattasi del secondo volume di un trattato di geometria analitica in tre volumi, del quale è stato già recensito il primo volume (questo Zbl. 32, 112). Il concetto ispiratore ed il carattere della trattazione sono quelli del primo volume. Il volume attuale comprende i capitoli 7, 8, 9, dedicati rispettivamente ai determinanti ed equazioni lineari, alle trasformazioni, movimenti ed affinità, alle rappresentazioni e gruppi. Il capitolo 7 è così di carattere prettamente algebrico ed algoritmico. Nel capitolo 8 invece, nel quale pure non manca una parte algoritmica essendo in esso tra l'altro sviluppato il calcolo delle matrici sino alla teoria dei divisori elementari, si riprendono le considerazioni geometriche con la classificazione delle coniche e delle quadriche e lo studio dei movimenti e delle affinità. Il capitolo 9 è ispirato al programma di Erlangen ed in esso viene dato particolare sviluppo alla geometria affine. *Conforto (Rom).*

Room, T. G.: Involutory unitary matrices of integers associated with certain geometric transformations. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 193—217 (1949).

Irgendeinem Punkt P einer allgemeinen ebenen kubischen Kurve entspricht eine involutorische Transformation \mathcal{P} der Kurve in sich, bei der jedem Punkt Q der mit P allinierte Punkt Q' zugeordnet ist. 3 beliebige derartige Transformationen zusammengesetzt ergeben wieder eine Transformation desselben Typus (infolge des Satzes über assoziierte Punkte einer Kubik). — Ausgehend von einem beliebigen Punkt der Kubik, kann man die Menge aller jener Punkte bilden, die man erhält, wenn man jeweils die Tangentialpunkte und die mit 2 bereits gefundenen Punkten allinierten Punkte hinzunimmt. Die diesen Punkten entsprechenden Transformationen bilden ein Gruppoid mit folgenden Eigenschaften: 1. volle Assoziativität; 2. eine ungerade Anzahl von Elementen zusammengesetzt ergeben wieder ein Element des Gruppoids; 3. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}$; $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A}$. Verf. nennt diese Menge von Transformationen ein „one-fold syzygetic system“ und untersucht ferner auch Systeme, die von mehreren Grundelementen erzeugt werden („ r -fold syzygetic system“). — Diese gruppentheoretischen Entwicklungen werden auf eine algebraische Fläche F der Ordnung $N + 2$ im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum angewendet, die eine $(N - 1)$ -fache Gerade v und eine irreduzible (rationale) Kurve \mathcal{Q} der Ordnung m enthält, welche v in $m - 1$ Punkten trifft. Irgendeine Ebene durch v schneidet F restlich in einer Kubik, auf der ein Punkt, nämlich der nicht auf v liegende Schnittpunkt von \mathcal{Q} , ausgezeichnet ist. Diesem Punkt entspricht eine involutorische Transformation der Kubik und der ganzen Kurve \mathcal{Q} eine ebensolche Transformation der Fläche F in sich. Gleichwie auf der Kubik gibt es nun auch auf der Fläche 1-, 2- und r -fache syzygetische Systeme von involutorischen Transformationen der Fläche in sich, auf die Verf. die Entwicklungen seiner vorausgehenden Arbeit (dies. Zbl. 30, 175) anwendet und die zugehörigen Matrizen Γ explizit aufstellt. *Gröbner.*

Bagchi, Haridas: Note on the common tangent of a cubic and one of its sextactic conics. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 135—139 (1948).

Die in homogenen Koordinaten etwas umständlichen Berechnungen des Verf. kann man symbolisch so schreiben: die Polargerade des Punktes x bezüglich der Kurve $f = (a'X)^3 = 0$ berührt den Kegelschnitt $\Omega = (\Omega u')^2 = 0$, falls $(I'x)^4 = (a'\Omega)(b'\Omega)(a'x)^2(b'x)^2 = 0$. Die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der Kurven f und Ω auf f sind die 12 Schnittpunkte von f und Γ . Aus den allgemeinen Sätzen von Jacobi und Cayley folgt, daß, wenn 6 dieser 12 Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, dasselbe von den 6 übrigen gilt. Ist nun $(\eta'x) = 0$ Inflexionstangente im Wendepunkt J , $(\xi'x) = 0$ die Tangente in P , dessen Tangentialpunkt J ist und $(s'x)^2 = S = 0$ der in P sextaktische Kegel-

schnitt, so ist

$$(a' x)^3 \equiv (s' x)^2 (\eta' x) - (\xi' x)^3 = 0,$$

$(a' x)^2 (a' y) \equiv (v' y) \equiv 2 (s' x) (s' y) (\eta' x) + (s' x)^2 (\eta' y) - 3 (\xi' x)^2 (\xi' y)$, woraus sich aus $(s v')^2 = 0$ wegen des Reduzenten $(s s')$ auf $\Delta = (s s')^2$ und $(s \xi')^2 = 0$ ohne weiteres

$$\Gamma \equiv 3 S^2 (s \eta')^2 + [8\Delta (\eta' x)^2 - 16 (s \xi') (s \eta') (\xi' x)^2] S - 12 \Delta (\eta' x) (\xi' x)^3 = 0$$

ergibt. Hieraus folgt unmittelbar, daß die sechs nicht in P auf $S = 0$ fallenden Schnittpunkte von f , Γ auf drei im Wendepunkte J konkurrenten Geraden liegen, deren Gleichung ist: $3(s \eta')^2 (\xi' x)^3 - 6(s \eta') (s \xi') (\xi' x)^2 (\eta' x) - 4\Delta (\eta' x)^3 = 0$.

E. M. Bruins (Amsterdam).

Fabricius-Bjerre, Fr.: Über projektive Böschungslinien auf Flächen 2. Ordnung.

Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **25**, Nr. 17, 21 S. 2,00 dkr. (1950).

Une courbe est dite à pente projective constante (projective Böschungslinie), brièvement c. p. p. c., quand ses tangentes rencontrent une conique fixe α . L'A. étudie les c. p. p. c. situées sur une quadrique Φ . Les tangentes aux c. p. p. c. qui passent par un point $P \in \Phi$ étant déterminées par les points d'intersection de α avec le plan tangent à Φ en P , il en résulte deux familles ∞^1 de c. p. p. c. sur Φ . Pour l'étude on se place au point de vue réel et, en conséquence, on doit faire distinction entre des domaines de Φ selon la nature réelle ou imaginaire des c. p. p. c. correspondantes, ces domaines étant séparés par une quartique de première espèce, intersection de Φ avec le cône Γ polaire de α par rapport à Φ . Les plans tangents à Γ coupent sur Φ deux familles de coniques C et, pour chaque point P , la tangente à une c. p. p. c. est conjuguée de celle d'une des coniques C . En faisant une projection centrale de Φ sur un plan π , les projections des C sont des cercles, non-euclidiens, dans la métrique projective déterminée en π par la projection du contour apparent de Φ , et les projections des c. p. p. c. sont des trajectoires orthogonales aux dits cercles. L'A. considère ces trajectoires dans les divers cas qui peuvent se présenter en dépendance du choix du centre de projection et aussi de la position relative de Φ et de α . On suppose, en général, que Φ est une quadrique non réglée ce qui permet de la transformer, au moyen d'une projectivité réelle, en une sphère et de ce fait réduire le cas général à l'étude des c. p. p. c. sphériques. *Ancochea* (Madrid).

Wylie jr., C. R.: A new series of line involutions in S_3 . Math. Mag., Texas **23**, 125—131 (1950).

In this paper the author is concerned with involutorial line-transformations in S_3 , which can be considered as involutorial point-transformations on a hyperquadric V_4^2 in S_5 . — In this paper the author considers the involution for which the line joining a general point P to its image P' lies entirely on V_4^2 . — These involutions possess four important numerical characteristics: m order of the involution; i order of the complex of invariant elements; n order of the ruled surface formed by the lines which join the points of a general line l to their respective images; k number of points of l with the property that the lines joining them to their images lie entirely on V_4^2 . These four quantities are not independent, but satisfy the identities $m + 1 = 2n - k = n + i$. — In the present paper is shown the existence of involutions associated with all possible sets of characteristics except those in which the lines left invariant form a linear complex. *M. Piazzolla-Beloch* (Ferrara).

Algebraische Geometrie:

Franchetta, Alfredo: Sulla superficie delle coppie non ordinate di punti di una curva algebrica, a moduli generali. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. **7**, 327—367 (1948).

Enriques aimait à considérer une courbe algébrique de genre p comme une courbe rationnelle dotée de p points doubles virtuellement inexistantes. L'A. nous donne dans ce mémoire

une remarquable application de ce principe de „dégénérescence“, au délicat problème des systèmes de courbes tracées sur la surface image des couples non ordonnés de points d'une courbe algébrique de genre p , et partant des correspondances sur une telle courbe. — Un système de courbes planes d'ordre m de genre p à modules généraux dotées de d points doubles contient comme éléments d'accumulation des courbes rationnelles dotées de $(d + p)$ points doubles. On peut donc choisir un système simplement infini de courbes C , contenant une de ces courbes rationnelles C_0 , correspondant à la valeur 0 du paramètre t . Sur la variété V des couples de points non ordonnés du plan, les couples d'une C_t définissent une surface F_t , qui si $t \rightarrow 0$, tend vers la F_0 des couples de points de C_0 . Cette dernière surface est rationnelle et possède p lignes doubles correspondant aux couples formés d'un point quelconque et d'un des points ∞^1 voisins au point double, virtuellement inexistant. Sur ces droites se trouvent des points triples et quadruples correspondant à des couples de points doubles (§ 29 et 30). — Pour obtenir la représentation plane de la F_0 , l'A. réfère la courbe C_0 à une conique sur laquelle les points doubles v i. se représentent par des couples de points A_{1i}, A_{2i} . Pour obtenir la représentation de la surface, on fait correspondre à tout couple M, N de C_0 le pôle de la droite qui joint leurs homologues sur la conique. Les tangentes à la conique déterminent sur les tangentes a_{1i} et a_{2i} en A_{ki} une homographie H_i . Les sections hyperplanes de F_0 sont donc les courbes d'un système linéaire ayant des couples neutres aux couples conjugués par H_i sur les a_i , ayant des ternes neutres aux points A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} ce dernier pôle de A_{1i}, A_{2i} ; enfin des quaternes neutres aux 4 points d'intersection ($i \neq j$) des tangentes $a_{1i}, a_{2i}, a_{1j}, a_{2j}$ (§ 30). — Dans ces conditions une courbe $T_{n,v}$ d'indice n et valence v sur la F , image d'une correspondance (n, v) sur la courbe générale C , a pour limite sur C_0 une correspondance de même valence dans le champ neutre défini par les couples de points neutres de C_0 . Mais ce système limite ne coïncide avec le plus général du champ neutre que si $n > 2p - 1$ ($v = 0$) ou $n > n_0 + 2p - 1$ ($v \neq 0$), n_0 étant valeur minima pour laquelle il existe une courbe irréductible d'ordre n_0 , passant v fois par les points A_{3i} et coupant les tangentes a_{1i}, a_{2i} en des points homologues par les H_i (§ 31, 32, 19, 25) si v positif; les conditions imposées pour v négatif sont plus complexes et dépendent de sa parité. Dans le cas contraire on peut seulement dire qu'il y est contenu. — L'étude complète des courbes planes représentant les correspondances symétriques de la conique à valence dans le champ neutre est faite après généralisation des notions d'équivalence et de valence, au champ neutre défini par les A_{ki} . Deux groupes X et Y sont équivalents ($X \equiv Y$) s'ils appartiennent tous deux à la série linéaire maxima définie par l'un d'eux et contenant les p couples neutres; la correspondance est à valence v si dans le même sens on a entre A, A' et leurs homologues X et X' , $vA + X \equiv vA' + X'$ (§ 16, 17). — Le Ch. I est consacré à l'étude du cas particulier $p = 1$, intéressant car il n'y a pas d'exception à la coïncidence des systèmes limites et des systèmes à valence dans le champ neutre. — L'A. donne deux applications de ses recherches, il détermine le nombre $p^p (n - p + 2)^p$ des correspondances symétriques à valence zéro dans lesquels se correspondent $n(n + 3)/2 - np + p(p - 1)/2$ couples de points ($n \geq 2p - 2$) (§ 36). Il donne également (§ 37, 38) une démonstration nouvelle du théorème d'Hurwitz-Severi, montrant l'impossibilité d'une correspondance à valence nulle. [Hurwitz, Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korrespondenzprinzip, Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig 1886, 10—38; F. Severi, Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare su una superficie algebrica, Math. Ann., Berlin 74, 515—544 (1913).]

B. d'Orgeval (Grenoble).

Franchetta, Alfredo: Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 685—687 (1949).

Sur une surface algébrique, le système adjoint à une courbe réductible C , de genre p est régulier de dimension $p_a + p - 1$, si la courbe C est virtuellement connexe, c'est à dire si deux parties complémentaires ont un nombre d'intersections virtuel positif, ou si une composante irréductible est courbe totale d'un système algébrique ∞^1 différent d'un faisceau irrationnel. — L'A. établit d'abord la régularité de l'adjoint à $C + L$, L étant une courbe irréductible quelleconque ayant un nombre positif d'intersections virtuelles avec C , si l'on suppose $|C|$ régulier. De ce résultat et des extensions déjà données par F. Severi [Teoremi di regolarità sopra una superficie algebrica, Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 6, 346—352 (1947)] au théorème de Picard, suit la nouvelle extension.

B. d'Orgeval (Grenoble).

Terracini, Alejandro: Über einige Klassen von rationalen Raumkurven. Rev. Univ. nac. Tucumán, A 6, 167—186 (1947) [Spanisch].

Nel presente lavoro l'A. completa una sua memoria: „Sulla riducibilità di alcune particolari corrispondenze algebriche [Rend. Circ. mat. Palermo 56, 112—143 (1932); questo Zbl. 4, 270] rettificando alcuni punti e modificandone altri. I

risultati a cui giunge sono i seguenti: Data una curva algebrica sghemba C^n d'ordine n dello spazio ordinario, e considerata la corrispondenza algebrica che risulta chiamando omologo del punto P variabile sulla curva, uno qualunque degli $n-3$ punti residui P' , segati sulla curva medesima dal piano osculatore in P , l'A. dimostra che le sole curve algebriche sghembe razionali C^n per le quali la corrispondenza si decompone nel massimo numero possibile, cioè in $n-3$ corrispondenze omografiche sono, prescindendo dalle curve W di Klein-Lie, la C^5 di Egan e la C^7 la cui rappresentazione parametrica si può mettere sotto la forma

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = t^4 : t^3 : t^7 - 2t : 1 - 2t^6.$$

— Se invece la corrispondenza relativa ad una C^n sghemba razionale (diversa da una curva W) contiene s componenti omografiche ($2 \leq s < n-3$), o esistono entro la medesima due che sono permutabili, oppure esse subordinano le s involuzioni di un G_{2s} diedrico (essendo in quest'ultimo caso s dispari). — Chiamando le C^n che corrispondono al primo caso di prima specie e quelle che corrispondono al secondo di seconda specie, l'A. dimostra che: Non esiste alcuna curva di prima specie d'ordine n pari. Esistono invece per n dispari arbitrario (≥ 7) delle C^n di prima specie di cui l'A. determina la natura. Per ogni s dispari, primo con n e tale che $n > 2s$ esistono delle C^n di seconda specie, di cui l'A. determina la natura. *Piazzolla-Beloch.*

Babbage, D. W.: The h -quadric of $n+2$ points in $[n]$. J. London math. Soc. 25, 51—54 (1950).

Soient $n+2$ points $\{P_{ij}\}$ de S_n , les points de toute $(n+1)$ -ple étant linéairement indépendants; et, pour une courbe C^n rationnelle et normale de S_n passant par les $\{P_{ij}\}$ soient $\{Q_{ij}\}$ les $2n$ points du hessien, sur C^n , des $\{P_{ij}\}$. Le lieu des points $\{Q_{ij}\}$, quand C^n varie, est une hyperquadrique V_{n-1}^2 de S_n . Ce théorème généralise aux S_n un résultat bien connu dans le cas du plan. *Ancochea* (Madrid).

Andreotti, A.: Le serie lineari sopra una retta multipla ed in particolare sopra una retta doppia. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 165—175 (1948).

Eine Kurve C des Geschlechtes $p > 0$ sei mittels einer g_r^1 auf eine r -fache Gerade χ abgebildet, so daß sich die Linearscharen g_r^n der C in Punktsysteme ∞^r , γ_r^n , des Index r auf χ transformieren. (Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die g_r^n mit der g_r^1 zusammengesetzt ist.) Verf. stellt sich nun die Aufgabe, die γ_r^n auf χ zu charakterisieren, die den g_r^n auf C entsprechen. Deshalb bemerkt Verf., daß die Korrespondenz $(r, 1)$ zwischen C und χ eine Korrespondenz $(r^n, 1)$ induziert zwischen der Mannigfaltigkeit W_n der n -Tupel von C und der Mannigfaltigkeit S_n der n -Tupel von χ . Nimmt man als projektives Bild von S_n das Duale eines linearen n -dimensionalen Raumes und ist I das projektive Bild der χ in S_n , so entsprechen im S_n der g_r^n der C gewisse ∞^r -Systeme von Hyperebenen, die auf I die γ_r^n ausschneiden. Verf. beweist, daß ein solches ∞^r -System von Hyperebenen immer aus den Tangentialhyperebenen einer Hyperfläche Φ von S_n besteht, die aus ∞^r linearen S_{n-r-1} besteht und längs diesen S_{n-r-1} eine feste Tangentialhyperebene besitzt. (Ausnahmefall, wenn jede Gruppe der γ_r^n aus mehreren Gruppen der g_r^n entsteht.) Das Problem der Charakterisierung der Systeme γ_r^n ist so auf die Charakterisierung der Hyperflächen Φ zurückgeführt. Diese Frage wird im Falle $r=2$ vollständig gelöst, indem man für vollständige und nichtspezielle Linearscharen folgendes beweist: Wird die Doppelgerade χ in eine rationale und normale Kurve I des S_n abgebildet, so werden die $\infty^2 \gamma_r^n$ ($n=r+p$) auf I von den Tangentialhyperebenen von Hyperflächen ausgeschnitten, die $(r-1)$ mal durch I und r mal durch die Verzweigungspunkte auf I hindurchgehen; außerdem entstehen solche Hyperflächen, wenn $p \leq 2r-1$ ist, als Schnitte mit einem S_n einer Hyperfläche Ψ eines S_{2r-1} ($q_r=r(r+3)/2$), die aus den $\infty^r S_{2r-1}$, welche die Veroneseschen Mannigfaltigkeiten V_{r-1}^{2r-1} einer Veroneseschen Mannigfaltigkeit V_r^{2r} enthalten, gebildet ist; und, wenn $p > 2r-1$ ist, als Projektionen aus einem S_{p-2r} von einem Schnitte mit einem S_{3r-1} derselben

Hyperfläche \mathcal{V} . Auch der Fall der speziellen und unvollständigen Linearscharen wird näher betrachtet. — Als besonders interessanter Fall wird der der elliptischen Doppelgeraden vertieft. Das System der Hyperflächen Φ wird jetzt von den und nur den Hyperflächen gebildet, die die Ordnung $r+1$ haben, $(r-1)$ mal durch I' und r mal durch die vier Verzweigungspunkte auf I' hindurchgehen. — Zum Schluß einige Bemerkungen über die Integration der Eulerschen Differentialgleichung $dx_1/\sqrt{P(x_1)} = dx_2/\sqrt{P(x_2)}$ (P Polynom vierten Grades) und über einige Abelsche Systeme, die diese Differentialgleichung verallgemeinern. Es werden unter anderem einige projektive Modelle von Wirtingschen Mannigfaltigkeiten gefunden.

Conforto (Rom).

Andreotti, Aldo: Sulle superficie di Kummer e di Weddle. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 61—64 (1949).

Als Sonderfall eines allgemeineren Satzes des Verf. (s. vorsteh. Referat) besteht die folgende Eigenschaft: Wird eine Kurve C des Geschlechtes 2 durch die kanonische g_2^1 auf eine doppeltüberdeckte kubische Raumkurve Γ mit 6 Verzweigungskurven abgebildet, so bilden sich die $\infty^2 g_3^1$ auf C in die ∞^2 Punktgruppensysteme ab, die auf Γ durch die Tangentialebenen der quadratischen Kegel, die durch die 6 Verzweigungspunkte hindurchgehen, geschnitten werden. Verf. zeigt, daß in dieser Eigenschaft die wirkliche Ursache folgender bekannter Sätze zu erkennen ist: Die Weddlesche Fläche (Ort der Spitzen der quadratischen Kegel durch 6 Punkte) ist eine birationale Transformierte der Kummerschen Fläche; und die Transformation ist sogar eine kubische (aber nicht eine quadratische) Cremonasche Transformation des ganzen Raumes. Hinweise auf den Fall, wo C nur virtuell vom Geschlechte 2 ist oder vom Geschlechte $2r$ ist.

Conforto (Rom).

Casulleras, Juan: Untersuchung der Korrespondenz zwischen der Grassmannschen Mannigfaltigkeit der Geraden des E_3 und der von zwei Ebenen erzeugten Segreschen Mannigfaltigkeit. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 234—237 (1949) [Spanisch].

Let V_4^2 , V_4^6 be the grassmannian (3,1) and the Segre's variety (2,2). The authors set the equations of a birational correspondence between V_4^2 and V_4^6 obtained considering both manifolds as birational images of the manifold of lines of S_3 . It is proved that the locus corresponding to each fundamental point of V_4^6 is a S_2 on V_4^2 (actually this result is an immediate consequence of well known properties of V_4^2).

Ancochea (Madrid).

Godeaux, Lucien: Sur certaines courbes fondamentales des transformations birationnelles de l'espace. Rev. Ci., Lima 50, 31—37 (1948).

Dans cette Note l'A. se propose d'étudier une courbe fondamentale d'une transformation birationnelle de l'espace le long de laquelle les surfaces du système homaloïdal ont des plans tangents fixes.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Godeaux, Lucien: Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 694—696 (1949).

Soit une courbe C de genre π contenant une involution cyclique i_p sans points unis de genre π' d'ordre premier p dont l'image est la courbe C' . Sur la surface F d'irrégularité π qui représente les couples non ordonnés de C , il existe une involution J_p d'ordre p^2 formée avec l'involution I_p qui fait se correspondre les couples nés de l'un d'eux par i_p . L'image de J_p est la surface qui représente les couples non ordonnés de C' d'irrégularité π' . L'involution I_p a pour image une surface d'irrégularité π' dont les caractères se calculent aisément en construisant le système canonique sur le modèle projectif formé de l'ensemble des cordes de C ayant choisi pour modèle de C une courbe de $S^{\pi-1}$ où l'involution i_p est subordonnée à une homographie cyclique; on trouve ainsi: $p_g = \frac{1}{2}(\pi' - 1)[p(\pi' - 1) + 1]$.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur la construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 919—923 (1949).

Si l'on considère une surface algébrique F d'un espace à $\frac{1}{2}[p(p+3)] + 3$ dimensions (p premier) conservée par une homographie biaxiale de période p , dont les axes sont un X^n à n dimensions et un plan Y , la projection F' de F à partir de Y sur X possède une involution cyclique d'ordre p sans points unis dont le diviseur de Severi est donc p . [Cf. L. Godeaux, Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité, Bull. intern. Acad. Sci. Cracovie, Cl. Sci. math. nat. Sér. A 1914, 362—368; Exemple de surfaces de diviseur supérieur à l'unité, Bull. Sci. Mat. 39, 182—185 (1915); A. Comessatti, Sulle superficie cicliche multiple, Rend. Sem. Mat., Palermo 1, 1—75 (1930).] — L'équation de F' s'obtient en remplaçant par des formes de degré p linéairement indépendantes sans points communs les coordonnées courantes de l'équation qui dans X représente les courbes planes d'ordre p . — Il existe sur F' une courbe C' le long de laquelle une famille d'hyper-surfaces d'ordre p a un contact d'ordre $p-1$ avec F' ; cette propriété peut se généraliser. L'A. traite à titre d'exemple le cas $p=3$. B. d'Orgeval (Grenoble).

Godeaux, Lucien: Sur un procédé de construction de transformations birationnelles hyperspatiales. Časopis Mat. Fys., Praha 73, 121—129 u. tschechische Zusammenfassg. 129—130 (1949).

L'A. dans cette Note donne un procédé de construction de transformations birationnelles de l'hyperspace en considérant deux espaces linéaires S_{r+s+1} , S'_{r+s+1} à $r+s+1$ dimensions, et dans S_{r+s+1} deux espaces linéaires S_r , S_s ne se rencontrant pas, et dans S'_{r+s+1} deux espaces linéaires S'_r , S'_s ne se rencontrant pas. — Entre les espaces S_r , S'_r est donnée une transformation birationnelle (m, m') , et entre les espaces S_s , S'_s une seconde transformation birationnelle (n, n') . — L'A. en déduit les suivantes transformations birationnelles entre les espaces donnés: 1) Une transformation qui fait correspondre aux hyperplans de S'_{r+s+1} dans S_{r+s+1} des hypersurfaces d'ordre $m+n-1$ et aux hyperplans de S_{r+s+1} dans S'_{r+s+1} des hypersurfaces d'ordre $mm'+nn'-1$. — 2) Une transformation birationnelle qui fait correspondre aux hyperplans de S'_{r+s+1} dans S_{r+s+1} des hypersurfaces d'ordre $m+n+1$ et aux hyperplans de S_{r+s+1} dans S'_{r+s+1} des hypersurfaces d'ordre $mm'+nn'+m'+n'-1$. — L'A. considère en particulier les cas $r+s+1=3$ et $r+s+1=4$. M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Amin, Amin Yasin: Sur la représentation paramétrique de la surface commune à deux hyperquadriques dans S_4 . C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1142—1143 (1948).

L'A. donne des équations paramétriques explicites d'une variété biquadratique de S_4 , laquelle est l'intersection de deux hyperquadriques de S_4 . Les équations données sont rationnelles. Kárteszi (Budapest).

Brenci, Maria Teresa: Sulla varietà quasi abeliana di Jacobi di genere effettivo nullo e genere virtuale due. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 7, 458—483 (1948).

Auf der Jacobischen Mannigfaltigkeit V_π einer Kurve vom virtuellen Geschlechte π , die entstanden ist durch Fixierung von π neutralen Paaren von getrennten Punkten auf einer Kurve vom effektiven Geschlechte Null, existieren immer, nach Ergebnissen des Ref. [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 273—291 (1948)], abzählbar unendlich viele Scharen ∞^π von birationalen Transformationen, die durch lineare Kongruenzen zwischen den Integralen, die virtuell als Integrale erster Gattung auf V_π zu betrachten sind, dargestellt werden. Da nun F. Severi bewiesen hat (Funzioni quasi abeliane; Roma, 1947), daß man im betrachteten Falle als V_π einfach einen linearen projektiven Raum S_π nehmen kann, so entsteht die Frage, die Untersuchung einer gewissen gemischten Gruppe in S_π zu vertiefen, die aus unendlich vielen Scharen ∞^π von Cremonaschen Transformationen besteht. Diese Untersuchung wird vom Verf. im Falle $\pi=2$ durchgeführt, wo sich die Jacobische Mannigfaltigkeit auf eine Ebene reduziert. Durch geschickte Wahl der Integrale

und der Koordinaten in der Ebene ist die zu studierende Gruppe einfach die Gruppe der Cremonatransformationen vom Typus:

$$(1) \quad x'_1 = b_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}}, \quad x'_2 = b_2 x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}},$$

wo b_1, b_2 willkürliche von Null verschiedene Zahlen und $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ irgendwelche ganze Zahlen sind mit:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Sind $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ irgendwie festgelegt, so daß (2) gilt, so erhält man eine ∞^2 Schar der Gruppe, wenn man in (1) b_1 und b_2 willkürlich variieren läßt. Verf. bestimmt in allen möglichen Fällen die Basispunkte des homaloidischen Netzes, das der Transformation (1) zugehört. Dies geschieht durch eine vertiefte Betrachtung über unendlichbenachbarte singuläre Punkte, die sich auf linearen oder überlinearen Zweigen folgen. Die Konfiguration dieser singulären Punkte hängt zusammen mit arithmetischen Eigenschaften der a_{ik} ; z. B. kommt hier in Betracht die Kettenbruchentwicklung von a_{22}/a_{11} . Conforto (Rom).

Chisini, Oscar: *Geometria numerativa*. Rend. Sem. mat. fis., Milano 19, 1—16 (1949).

Einführender Vortrag über das Wesen und die wichtigsten Prinzipien der abzählenden Geometrie, wobei besonders auf die topologischen Grundlagen derselben hingewiesen wird. Verf. behandelt im besonderen das Korrespondenzprinzip von Chasles und dessen Anwendung in einfachen Beispielen, wobei auf die Gefahr von Fehlschlüssen aufmerksam gemacht wird, das Prinzip von Cayley-Brill für Korrespondenzen auf nicht-rationalen Kurven, das mit Hilfe funktionentheoretischer und topologischer Überlegungen bewiesen wird, endlich das Prinzip der Kontinuität oder der Erhaltung der Anzahl mit mehreren lehrreichen Anwendungen. Die Theorie der Charakteristiken und der symbolische Kalkül von Schubert werden nicht berührt. Gröbner (Innsbruck).

Baldassarri, Mario: *Sulle caratteristiche per le condizioni doppie e triple delle coniche*. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 54—67 (1949).

An Stelle der von Severi (dies. Zbl. 23, 372; vgl. auch Severi, Grundlagen der abzählenden Geometrie, Wolfenbüttel 1949) angegebenen Charakteristiken $(\mu^3, \xi, \zeta, \delta\mu^2, \eta\nu^2)$ für die dreifachen Bedingungen bei vollständigen Kegelschnitten, einschließlich derjenigen Bedingungen, welche durch ∞^1 in 3. Gattung ausgeartete Kegelschnitte erfüllt werden, führt Verf. die Charakteristiken $(\mu^3, \xi, \widehat{\mu\nu\nu}, \zeta, \zeta_1)$ ein, die sich besser für die Behandlung der Bedingung des Hyperoskulierens eignen. Die Charakteristiken für die zweifachen Bedingungen sind wie bei Severi $(\mu^2, \widehat{\mu\nu}, \nu^2, \delta\mu, \nu\nu)$. Dabei bedeuten: μ die Bedingung, daß ein Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt gehe, ν die dazu duale Bedingung, daß er eine gegebene Gerade berühre, $\widehat{\mu\nu}$ daß er eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berühre, ζ daß er in zwei Gerade mit gegebenem Schnittpunkt zerfalle, ζ_1 die zu ζ duale Bedingung, δ und η die Bedingungen, daß ein Kegelschnitt in 1. beziehungsweise 2. Gattung ausgeartet sei. In diesen Charakteristiken stellt sich die Bedingung β , daß ein Kegelschnitt eine algebraische Kurve der Ordnung n , der Klasse m und des Geschlechts p an einer Stelle vierpunktig berühre, folgendermaßen dar:

$$\beta = 7(t-m)\mu^3 + 9(m-t)\xi + 3(t-m)\widehat{\mu\nu\nu} + (4m-3t)\zeta + (6t-5m)\zeta_1,$$

wobei die Abkürzung $t = 6m - 4n$ verwendet ist. Gröbner (Innsbruck).

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

• **Gans, Richard:** *Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf Physik und Technik*. 7. Aufl. (Teubners Mathematische Leitfäden Bd. 16). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1950. 120 S., 44 Fig., kart. DM 5,90.

Moreau, Jean-Jacques: Le calcul tensoriel et les opérations vectorielles orientées. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1472—1474 (1949).

Es handelt sich um eine gute und übersichtliche Zusammenstellung bekannter Operationen im Bereich schiefssymmetrischer Tensoren, deren flächen- und (raum-)elementbildenden Charakter bereits H. Weyl durch die Terminologie „lineare Tensoren“ hervorgehoben hatte (vgl. H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., Berlin 1923).

M. Pinl (Dacca).

Hesselbach, B.: Über vierdimensionale Drehungen. Math. Ann., Berlin **121**, 22—32 (1949).

Verf. geht von der bekannten Darstellung der Drehungen der 4-dimensionalen Kugel durch Einheitsquaternionen aus und führt die Quaternionen abweichend vom Üblichen als Rechtsoperatoren $\cdot \frac{1}{p} q$ ein, die auf einen 4-dimensionalen Vektor r nach der Formel $r \frac{1}{p} q = r \bar{p} q = \frac{(p q) r + (r p) q - (r q) p + [r p q]}{(p p)}$ anzuwenden sind.

Dabei sind p und q auch Vektoren, $(p q)$ ihr Skalarprodukt und $[r p q]$ der Vektor des Tripelprodukts. Die Quaternion erscheint somit wie schon bei Hamilton selbst als Vektorquotient; $r \bar{p}$ kann entsprechend als Linksoperator in Anwendung auf q aufgefaßt werden. Skalar- und Tripelprodukt werden dabei allgemein mit Hilfe einer Metrik (g_{ik}) definiert. Dann wird gezeigt, wie man mit Hilfe dieser so eingeführten Quaternionen rechnen kann, insbesondere, daß sie eine Gruppe bilden und daß man eine beliebige Quaternion $p \bar{q}$ auch so schreiben kann, daß der erste oder zweite Faktor ein beliebiger bezüglich der Metrik nicht isotroper Vektor ist. Deutet man nun $(x x) = 0$ als invariante Fläche F_2 im unendlich Fernen des R_4 , so beweist man leicht, bei den Transformationen $y = x \bar{p} q$ die eine und bei $y = s r x$ die andere Geradenschar auf F_2 invariant bleibt. Beide Sorten von Transformationen gehen dabei durch einen Spiegelungsprozeß auseinander hervor. Die beiden nächsten Paragraphen enthalten dann die Lösung der Aufgabe, eine gegebene allgemeine Drehung, d. h. automorphe Kollineation $y = A(x)$ von F_2 ohne Vertauschung der beiden Geradenscharen in ihre Komponenten zu zerlegen. Die Lösung gelingt bis auf einen Ausnahmefall unter Benutzung des Cayley-Hamiltonschen Polynoms von A , das die besondere Eigenschaft besitzt, symmetrisch zu sein. Nach einem Ergebnis von Rosanes aus dem Jahre 1875 gibt es bei Symmetrie des charakteristischen Polynoms im allgemeinen auch stets eine zugehörige invariante quadratische Form. Diese Form wird mit den entwickelten Hilfsmitteln hier zu gegebenem A auf 2 verschiedene Weisen konstruiert.

Burau (Hamburg).

Stipani, Ernest: Sur une équation de l'odographe de vitesse dans le plan et son application. Vesnik Drustva Mat. Fis. Srbije **1**, 45—49 und russische und franz. Zusammenfassg. 49 (1949) [Serbisch].

Dans cet article on déduit l'équation de l'odographe de vitesse dans le plan au moyen des coordonnées polaires, où les coordonnées sont : l'intensité $|\vec{V}|$ du vecteur vitesse et l'angle θ de ce vecteur par rapport à l'axe des x . L'équation se déduit directement de la définition de l'odographe, en partant de la trajectoire définie par les équations paramétriques, le temps t étant le paramètre. On considère ensuite l'application de l'équation obtenue à la détermination de l'odographe de vitesse d'un point qui se déplace sur une trajectoire donnée de telle sorte que son rayon-vecteur forme un angle constant avec le vecteur d'accélération \vec{w} . Comme exemples on considère la trajectoire $f(x) = x^\alpha (\alpha > 1)$ puis $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ et l'exemple du mouvement planétaire.

Autoreferat.

Signorini, Antonio: Un théorème anallagmatique en cinématique des surfaces. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 160—162 (1949).

Es wird die Ausbreitung einer anfangs punktförmigen Welle unter der Voraussetzung betrachtet, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit an jeder Stelle einer Potenz ihrer Entfernung von einem festen Punkt 0 mit dem Exponenten $1-\mu$ proportional ist. Dann gilt: Unter den Inversionen mit dem Zentrum 0 gibt es zu jeder Zeit eine, durch die die Wellenfläche in sich transformiert wird, solange sie 0 nicht erreicht hat; die Fläche hört auch später nicht auf, anallagmatisch zu sein, wenn $1/\mu$ eine ganze Zahl ist. *Löbell (München).*

Consiglio, A.: Alcune applicazioni di un problema di cinematica. *Mat. Catania* 3, 97—110 (1948).

Es wird die Bedingung dafür angegeben, daß zwei geradlinig und gleichförmig bewegte Punkte denselben kürzesten Abstand haben wie die beiden Geraden, auf denen sie sich bewegen. Anwendung auf einige elementare Aufgaben der Kinematik.

Schmeidler (Berlin).

Bereis, Rudolf: Mechanismen zur Verwirklichung der Joukowski-Abbildung. *Arch. Math., Karlsruhe* 2, 126—134 (1950).

Beschreibung einiger Mechanismen, die die bekannte Joukowski-Abbildung $Z^* = Z + a^2/Z$ auf mechanischem Wege leisten. Diese Mechanismen müssen einen Inversor enthalten und die Zusammensetzung der Vektoren Z und a^2/Z durchführen. Für konstante a^2 verwendet Verf. zwei gekoppelte Peaucellier-Inversoren. Durch Kombination eines Hartschen Inversors mit einem Gelenkparallelogramm erhält man einen Mechanismus mit veränderbarem Wert von a^2 . Abschließend geht Verf. auf weitere Verwendungsmöglichkeiten für diese Mechanismen ein. *Dizioğlu.*

• **Geronimus, Ja. L.:** Über die Anwendung der Čebyševschen Methoden auf den Ausgleich von Mechanismen. Moskau, Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1948. 148 S.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Aleksandrov, A. D.: Über die Grundlagen der Differentialgeometrie und ihre Darstellung. *Uspechi mat. Nauk* 4, Nr. 3 (31), 139—170 (1949) [Russisch].

Diese Arbeit enthält eine ausführliche Kritik an allen, dem Verf. bekannten Lehrbüchern über Differentialgeometrie, wobei jedoch das Hauptaugenmerk auf die außerhalb Rußlands weniger bekannten russischen Werke von Büschgens, Milinski, Kagan, Finikoff gelegt wird. Die Kritik setzt bereits bei den Einführungen des Begriffs einer Kurve und Fläche ein. An einfacheren Beispielen wird gezeigt, in wie unzureichender Weise einige Verfasser eine Kurve als Schnitt zweier Flächen definieren; Entsprechendes gilt für den Flächenbegriff. Eine genauere Diskussion dieser Frage durch Aleksandrov zeigt dann, daß man nicht ohne topologische Begriffe (stückweise Abbildung der Fläche auf die euklidische Ebene und geeignete Heftung der Stücke) auskommt. Andere Einwände beziehen sich auf die Theorie der geodätischen Linien und den Satz von Gauß-Bonnet; z. B. findet eine in einem Buch aufgetretene Behauptung, daß Flächen mit durchweg negativer Krümmung keine geschlossenen Geodätischen haben, ihre Widerlegung am Rotationshyperboloid. Weiterhin wird ein im Lehrbuch Duschek-Mayer, Bd. I, p. 217 enthaltener Beweis über die Starrheit der Eiflächen als unzureichend hingestellt sowie einer von Favard und Süss (1933) über die Bestimmung einer konvexen Fläche aus der Summe ihrer Haupt-Krümmungsradien. Im Schlußkapitel werden einige Forderungen an eine sachgemäße Behandlung der Differentialgeometrie gestellt. Es sei noch bemerkt, daß das russische Werk von Raschewski am höchsten eingeschätzt wird, da es am wenigsten zu Einwänden Anlaß gibt und den aufgestellten Forderungen Aleksandrovs am besten entspricht. *Burau (Hamburg)*

Havlicek, Karel: Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à n dimensions. — Courbes sphériques. *Časopis Mat. Fys., Praha* 72, 137—145 und tschechische Zusammenfassg. 146 (1947).

In der Arbeit werden die n -dimensionalen Hypersphären des R_n untersucht, welche eine Kurve K (deren Gleichung in der vektoriellen Form $r=r(s)$ gegeben ist) in einem nicht-singulären Punkte 1., 2., ..., n -fach oskulieren. Es wird mit vektoriellen Hilfsmitteln bewiesen, daß der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Hyperkugeln, welche K mindestens k -fach oskulieren, eine $(n-k)$ -dimensionale Hyperebene ist. Mittelpunkt und Radius der n -fach oskulierenden Hyperkugel werden rekursiv (und für $n=3, 4, 5$ explizit) bestimmt. — Weiterhin leitet Verf. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür her, daß die Kurve K auf einer Hyperkugel liegt, und zeigt, daß ein Hyperkreis (d. i. eine Kurve, deren sämtliche Krümmungen von 0 verschiedene Konstante sind) dann und nur dann auf einer Hyperkugel liegt, wenn die minimale Dimensionszahl des sie enthaltenden Raumes gerade ist. (Anmerkung des Ref.: Die Durchschnittsmenge aller n -dimensionalen Hyperkugeln, welche K in einem Punkte k -fach oskulieren, ist identisch mit der vom Ref. untersuchten k -dimensionalen, k -fach oskulierenden Hyperkugel.)

E. Egerváry (Budapest).

Tietze, Heinrich: Die Relation zwischen den drei quadratischen Fundamentalformen einer Fläche. *Math. Z.*, Berlin **52**, 590—592 (1950).

L'A. donne une nouvelle démonstration pour la relation

$$(\ast) \quad \text{III} - 2H \text{II} + K \text{I} = 0,$$

qui relie les trois formes différentielles fondamentales d'une surface, basée sur la théorie des matrices. Soient A, B, C les matrices correspondantes aux formes I, II, III. L'équation $|B - \lambda A| = 0$, qui donne les rayons de courbure principaux, peut se mettre sous la forme $\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0$. Elle coïncide avec l'équation caractéristique de la matrice BA^{-1} ; en conséquence on aura la relation

$$(\ast\ast) \quad (BA^{-1})^2 - 2HBA^{-1} + K = 0.$$

D'autre part, les formules de Weingarten permettent d'établir l'identité $C = BA^{-1}B$. En multipliant $(\ast\ast)$ à droite par A , on obtient $C - 2HB + KA = 0$, relation équivalente à (\ast) . *Ancochea* (Madrid).

Löbell, Frank: Ein differentialgeometrischer Operator in der Theorie der Flächenabbildungen. *Arch. Math.*, Karlsruhe **2**, 17—23 (1949/50).

Ist $\mathfrak{x}(u, 0)$ eine Fläche mit dem Flächenelement $df = W du dv$, so wird der biegungsinvariante Operator

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{W} \left(\mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v} \right)$$

betrachtet. Die von Beltrami eingeführten Differentiatoren lassen sich so auf \mathfrak{D} zurückführen:

$$\Delta_1 \varphi = (\mathfrak{D}\varphi)^2, \quad \Delta(\varphi, \chi) = \mathfrak{D}\varphi \mathfrak{D}\chi, \quad \Delta_2 \varphi = \mathfrak{D}^2 \varphi.$$

Es wird gezeigt, wie man die geodätische Krümmung einer Flächenlinie und das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche mittels \mathfrak{D} gewinnen kann. Es folgen Anwendungen des Operators auf die Abbildung von Flächen. *Blaschke* (Hamburg).

Maneng, Louis: Sur les familles de surfaces admettant les mêmes formes minima. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 805—806 (1949).

Verf. benutzt das Pfaffsche System, mit dessen Hilfe V. Lalan (vgl. dies. Zbl. **29**, 73) die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi der klassischen Flächen-theorie ausdrückt, und bestimmt die Bedingungen, unter welchen dieses System ein vollständig integrables System wird. In diesem Falle ergeben sich dreifach unendlich viele Flächen mit gemeinsamen Minimalformen. Die Deutung der Bedingungen für ein vollständiges Pfaffsches System ergibt: die einzigen Flächen, auf welchen das erwähnte Pfaffsche System vollständig integrabel ist, sind diejenigen Weingarten-schen Flächen, auf welchen die Kurven gleicher mittlerer Krümmung isotherme und geodätisch parallele Kurven sind. *M. Pinl* (Dacca).

Lalan, Victor: Le rôle du tenseur moyen dans la détermination des directions principales. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 536—538 (1949).

Verf. versteht unter tenseur moyen den Ausdruck $l_{\alpha\beta} = H_{,\alpha\beta} - (H_{,\alpha} A_{\beta} + A_{,\alpha} H_{\beta})/A$. H ist die mittlere Krümmung der Fläche, $H_{,\alpha\beta}$ deren zweite kovariante Ableitung, A ist gegeben durch $\sqrt{H^2 - K}$, K bedeutet die totale Krümmung und $A_{,\alpha}$, A_{β} sind erste Ableitungen. Der Tensor $l_{\alpha\beta}$ wurde bereits von H. W. Alexander betrachtet (vgl. H. W. Alexander, Trans. Amer. math. Soc. **47**, 230 (1940); T. Y. Thomas, Bull. Amer. math. Soc. **51**, 390—399 (1945)). Sind L_{ii} die Komponenten des Tensors $l_{\alpha\beta}$ in einem Darboux'schen Koordinatensystem (vgl. E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris 1945, 128), so ist die Differenz $L_{11} - L_{22}$ eine Funktion der Metrik und der mittleren Krümmung. Der Tensor $l_{\alpha\beta}$ wird so von Bedeutung für die Flächen von Ossian Bonnet; sie lassen sich durch Proportionalität von mittlerem und metrischem Tensor charakterisieren. M. Pini (Dacca).

Lalan, Victor: Sur l'emploi d'un repère canonique dans l'étude des réseaux conjugués. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1115—1116 (1949).

Soit M $e_1 e_2 e_3$ le repère associé à un réseau conjugué (e_1, e_2 tangents aux courbes du réseau, e_3 unitaire et normal à la surface. Par choix opportun des longueurs e_1, e_2 , on a $dM = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$, $\Phi = \varepsilon(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, Φ seconde forme et $\varepsilon = \pm 1$ du signe de la courbure totale K ; on a ainsi le repère canonique associé au réseau conjugué. Supposons $K > 0$; $ds^2 = g_{ik} \omega^i \omega^k$, $\varphi = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$, $de_i = \omega_i^k e_k + \omega_i^3 e_3$, $\omega_i^k = \gamma_{ij}^k \omega^j$ ($i, j, k = 1, 2$). Codazzi donne $2\gamma_{12}^1 = \gamma_{11}^2 + \gamma_{21}^2$, $2\gamma_{21}^2 = \gamma_{22}^1 + \gamma_{12}^1$ avec l'équation de Pfaff $2r\omega^1 - 2s\omega^2 = \omega_1^1 - \omega_2^2$; r, s vérifient $d\omega^1 = r[\omega^1 \omega^2]$, $d\omega^2 = s[\omega^1 \omega^2]$ et Gauss donne $Kg = 1$, puis

$$-2Q[\omega^1 \omega^2] = [(\omega_1^1 + \omega_2^2)(\omega_1^2 - \omega_2^1)] - 2H[\omega^1 \omega^2],$$

H courbure moyenne de la surface, Q courbure de la forme Φ . — La donnée d'un ds^2 et d'un réseau apte à être conjugué sur une surface représentative permet de déterminer le repère canonique associé par des calculs finis. Par exception, on peut avoir deux repères: S, \bar{S} étant les surfaces images, ω^1, ω^2 relatifs à S et ω^1, ω^2 relatifs à \bar{S} vérifient $\omega^1 = t\omega^1, \omega^2 = t^{-1}\omega^2, t = \sqrt[4]{-B/A}$, $A = d(\gamma_{22}^1 \omega^1) - 2\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^1 [\omega^1 \omega^2]$, $B = d(\gamma_{11}^2 \omega^2) + 2\gamma_{11}^2 \gamma_{22}^1 [\omega^1 \omega^2]$. Si $A = B = 0$, il y a ∞^1 repères canoniques: le réseau est conjugué persistant. On a $\gamma_{22}^1 \omega^1 = \frac{du}{z(u+v)}$,

$\gamma_{11}^2 \omega^2 = \frac{dv}{2(u+v)}$, $t = \sqrt[4]{\frac{h+v}{h-u}}$, où u, v sont deux intégrales premières de $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, h constante arbitraire. — Cette méthode donne l'équation aux dérivées partielles d'ordre 4 relative à la détermination des réseaux sphériques images de réseaux conjugués persistants. B. Gambier (Paris).

Lalan, Victor: Sur la déformation à réseau conjugué persistant. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1842—1844 (1949).

Les surfaces admettant une déformation continue à un paramètre avec réseau conjugué persistant non géodésique dépendent de six fonctions arbitraires essentielles d'un argument [en négligeant le changement de paramètres $u_1 = f(u)$, $v_1 = \varphi(v)$]. Leur ds^2 est réductible à la forme (U fonction de u , V de v)

$$ds^2 = \xi^2 \frac{Q_v}{R} du^2 + 2\xi \zeta \frac{U+V}{\sqrt{U'V'}} \frac{Q_{uv}}{R} du dv + \zeta^2 \frac{Q_u}{R} dv^2.$$

On a posé $R = \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{(U+V)^2}{U'V'} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} \right)^2$ et la fonction Q vérifie l'unique équation

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial u \partial v} - \frac{U'V'}{2(U+V)^2} \left[1 - \frac{R^2}{Q_{uv}^2} \left(\frac{Q_u}{R} \right)_u \left(\frac{Q_v}{R} \right)_v \right] + \frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v}.$$

Ensuite, ξ et ζ vérifient le système

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\sqrt{U'V'}}{2(U+V)} \frac{R}{Q_u} \left(\frac{Q_u}{R} \right)_u, \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\sqrt{U'V'}}{2(U+V)} \frac{R}{Q_v} \left(\frac{Q_v}{R} \right)_v.$$

La forme asymptotique Φ est alors $\Phi = \xi \sqrt{\frac{U'}{2(U+V)}} du^2 + \zeta \sqrt{\frac{V'}{2(U+V)}} dv^2$. La déformation continue s'obtient en remplaçant U par $U+m$, V par $V-m$ où m est une constante arbitraire. — Un cas particulier intéressant s'obtient en prenant

$$\left(\frac{Q_u}{R} \right)_u = 0, \quad \xi = 2 \frac{U_1 \sqrt{U'}}{U}, \quad \zeta = \frac{U_1 (V V_1 - V_1 V')}{V_1 \sqrt{V'}} \frac{d}{dv} \left(\frac{V_1}{V V_1 - V_1 V'} \right) + V_2.$$

Le réseau conjugué est formé de courbes planes: les plans des courbes $u = C$ sont parallèles entre eux et les plans des lignes $v = C_1$ sont perpendiculaires aux précédents: ces surfaces ont été découvertes par E. Goursat. *B. Gambier (Paris).*

Lemoine, Simone: Sur les surfaces déformables avec persistance d'un réseau conjugué de courbes coniques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 920—922 (1950).

L'A. rappelle les résultats données par M. Lalan et s'occupe du cas où le réseau conjugué persistant est formé de lignes coniques. Si $L du^2 + N dv^2$ est la forme asymptotique, $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} k \right\}$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \right\}$ les symboles de Christoffel de la surface et de sa représentation sphérique, Codazzi donne

$$\frac{\partial}{\partial v} \log L = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \log N = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\}$$

et, d'après Cosserat, $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \frac{-V'}{2(U+V)}, \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \frac{-U'}{2(U+V)}$, U fonction de u , V de v . Les

lignes u, v sont coniques, donc $\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\}$ d'où $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \frac{-V_1'}{U_1 + V_1},$

$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} 2 \right\} = \frac{-U_1'}{U_1 + V_1}$, U_1 fonction de u , V_1 de v . On a alors $L = \frac{U_1'^2}{(U_1 + V_1) \sqrt{U+V}},$

$N = \frac{V_1'^2}{(U_1 + V_1) \sqrt{U+V}}$; le réseau (u, v) est isotherme conjugué. Comparant avec

M. Lalan, on doit prendre $\xi = \frac{U_1'^2}{U_1 + V_1} \sqrt{\frac{2}{U'V'}}, \quad \zeta = \frac{V_1'^2}{U_1 + V_1} \sqrt{\frac{2}{U'V'}}, \quad R = U_3' V_3' \frac{(U_1 + V_1)^2}{\sqrt{U+V}} e^Q;$

en choisissant u, v de sorte que $du = \frac{dU_1'}{\sqrt{dU_1 dU_1}}, dv = \frac{dV_1'}{\sqrt{dV_1 dV_1}}$, on a pour déterminer Q

les deux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$\left(\frac{Q_u}{R} \right)_u = \left(\frac{Q_v}{R} \right)_v, \quad \left(\frac{U' - V'}{U' V'} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial u \partial v} \right)^2 - \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{U_1' V_1' (U_1 + V_1)^2}{\sqrt{U+V}} e^Q = 0.$$

B. Gambier (Paris).

Lalan, Victor: Le problème d'Ossian Bonnet et la théorie de l'immersion d'un ds^2 . Ann. sci. École norm. sup., III. S. **66**, 95—124 (1949).

Das nach O. Bonnet benannte Problem besteht in der Bestimmung aller Flächen des dreidimensionalen euklidischen Raumes, welche man ohne Änderung der Hauptkrümmungen deformieren kann [vgl. E. Cartan, Bull. Sci. math., II. S. **66**, 55—85 (1942); dies. Zbl. **27**, 89]. Es handelt sich also um ein Einbettungsproblem einer binären Metrik der Klasse 1. Da die Metrik vorgegeben ist, handelt es sich zunächst um die Bestimmung der drei Koeffizienten der zweiten Fundamentalform aus dem theorema egregium und den Codazzischen Gleichungen. Da das theorema egregium für diese unbekannten Koeffizienten nur eine algebraische Bedingung darstellt, kann man einen dieser unbekannten Koeffizienten eliminieren und die restlichen beiden allein den Codazzischen Bedingungen unterwerfen. Die an diese Bedingungen sich anschließende Integrabilitätsbedingung führt nun auf den sehr bemerkenswerten Ausnahmefall der von O. Bonnet studierten Flächen. Von den beiden verbleibenden unbekannten Funktionen lassen sich dabei eine als die mittlere Krümmung der Fläche einführen und die andere als der Winkel, unter welchem die erste Schar der Krümmungslinien der Fläche eine gewisse andere Kurvenschar der Fläche (gewählt als Parameterlinien) schneidet. Da die Metrik vorgegeben ist, gehört dann zu einem bestimmten Wert der mittleren Krümmung ein bestimmtes Wertepaar der Haupt-

krümmungen. Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten studiert Verf. die Formel, welche die Berechnung der Hauptrichtungen aus Metrik und gegebener mittlerer Krümmung auf dem Wege endlicher Operationen gestattet. Dabei ergibt sich die Theorie des sogenannten „tenseur asymptotique“, welcher bereits in den verwandten Untersuchungen von H. W. Alexander und T. Y. Thomas eine Rolle spielt [H. W. Alexander, Trans. Amer. math. Soc. **47**, 230—253 (1940); T. Y. Thomas, Bull. Amer. math. Soc. **51**, 390—399 (1945)]. Im zweiten Teil werden die Flächen von O. Bonnet behandelt. Die Integrabilitätsbedingung der Codazzi'schen Gleichungen hatte Verf. auf die einfache Form $X \cos \theta + Y \sin \theta = Z$ gebracht. Für $X = Y = Z = 0$ ist sie identisch erfüllt, und für $X = Y = 0$ ist offensichtlich konstantes Verhalten der mittleren Krümmung H hinreichend, da X und Y homogen von den Ableitungen der mittleren Krümmung abhängen. Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung werden in diesem Zusammenhang O. Bonnetsche Flächen erster Klasse genannt. Dann gilt: deformiert man eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung, ohne die Hauptkrümmungen zu ändern, so schneiden die neuen Krümmungslinien die alten unter einem konstanten Winkel. Versteht man unter A die halbe Differenz der Hauptkrümmungen, so besteht für die Bonnetschen Flächen erster Klasse die Differentialgleichung $A(\log A)_{,rr} = H^2 - A^2$. Zu jeder ihrer Lösungen $A(u, v)$ gehört eine einparametrische Schar von Flächen gleicher Metrik ds^2 , gleicher mittlerer Krümmung H , mit „formes asymptotiques“

$$\Phi = du^2 e^{2i\theta} + H ds^2 + dv^2 e^{-2i\theta},$$

welche von der beliebigen Konstanten θ abhängen. Weiterhin behandelt Verf. die allgemeineren Bonnetschen Flächen mit veränderlicher mittlerer Krümmung. Mit Verwendung des sogenannten mittleren Tensors

$$l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha} = H_{,\alpha\beta} - \frac{2 H H_{,\alpha} H_{,\beta}}{A^2} + \frac{K_{,\alpha} H_{,\beta} + H_{,\alpha} K_{,\beta}}{2 A^2}$$

ergibt sich zunächst: der mittlere Tensor Bonnetscher Flächen und nur solcher ist proportional zum metrischen Tensor: $l_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$. Nach einem Satz von O. Bonnet sind ferner alle Flächen, welche sich mit Erhaltung der mittleren Krümmung deformieren lassen, isotherme Flächen. Weiterhin kann Verf. jetzt Ergebnisse seiner früheren Untersuchungen [V. Lalan, C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 883 (1946) und dies. Zbl. **32**, 308] verwenden, insbesondere die sogenannte Primitivfunktion einer Fläche (ihr Gradient liegt symmetrisch zum Gradienten der mittleren Krümmung bezüglich der ersten Hauptrichtung). Die beiden Beltramischen Differentialparameter der Primitivfunktion werden auf Bonnetschen Flächen proportional und für besondere Parameterwahl sogar identisch. Die Integration dieser Relation führt auf zwei weitere Klassen Bonnetscher Flächen, die sogenannte zweite Klasse Bonnetscher Flächen, welche imaginäre Flächen sind, und eine weitere dritte Klasse, deren Exemplare auf Drehflächen abwickelbare Flächen sind. Die Kurven konstanter mittlerer Krümmung der Flächen dritter Klasse sind geodätische Parallele. Umgekehrt gilt der Satz: alle Flächen mit isotherm-geodätisch parallelen Kurven konstanter mittlerer Krümmung sind entweder Flächen, welche eine einparametrische Gruppe von Bewegungen gestatten, oder Bonnetsche Flächen dritter Klasse. Unter den Flächen dritter Klasse unterscheidet Verf. noch weitere drei Typen, je nachdem nach getroffener Konstanterwahl die charakterisierende Differentialgleichung vier, eine oder zwei Lösungsflächen gestattet. Dabei werden zahlreiche Ergebnisse von E. Cartan wiedergewonnen. Auch methodisch ist Verf. den Wegen E. Cartans gefolgt mit dauernder Verwendung der „théorie du trièdre mobile“, wie sie etwa im 7. Kapitel des E. Cartanschen Werkes „Sur les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques“ (Paris 1945) dargestellt wird.

M. Pinl (Dacca).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

• Bol, Gerrit: **Projektive Differentialgeometrie. I.** (Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher Bd. IV). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1950. VII. 365 S. mit 15 Fig.

Il volume è diviso in quattro parti: I. Curve piane; II. Introduzione alla geometria dello spazio; III. Curve sghembe; IV. Striscie superficiali. Risulta già da ciò che il volume ha carattere introduttivo alla teoria delle superficie cui sarà riservato un altro volume. — I titoli delle varie parti ne caratterizzano sufficientemente il contenuto: il metodo ha carattere elementare ed esposto con tutta chiarezza. Com'è noto la difficoltà specifica della geometria proiettivo-differenziale risiede nella relativa arbitrarietà della rappresentazione analitica dell'ente geometrico (fattore di proporzionalità delle coordinate: scelta dei parametri) e si può perciò procedere per due vie differenti: o fissare in modo intrinseco gli elementi arbitrari, o lasciare a questi la loro arbitrarietà e studiare come varino le configurazioni legate all'ente

al variare di quelli. L'A. sceglie in generale la seconda via, evitando questioni di normalizzazione. — Nella prima parte, oltre le nozioni obbligate relative ai riferimenti e agli sviluppi locali è da segnalare (come novità rispetto a trattati precedenti) la determinazione del minimo numero di punti sestattici relativi ad un'ovale, o ad un suo arco avente negli estremi la stessa conica osculatrice. — La parte seconda raccoglie varie proprietà elementari sia delle curve sgheembe che delle superficie (in particolare rigate), delle trasformazioni di Laplace, delle congruenze di rette (in particolare W); mi piace segnalare la precisazione della nozione di contatto di curve (o superficie) la cui necessità è stata sempre sentita da chi si è occupato di questi argomenti (indipendenza della nozione di contatto da quella di corrispondenza). — La parte terza è specificatamente dedicata alle curve sgheembe; si fa uso particolarmente della cubica armonica di Fubini (e delle configurazioni ad essa collegate) che divide armonicamente sul cono quadrico che le contiene (rispetto al vertice) la cubica a contatto 6-punto e la cubica che ha sei piani osculatori infinitamente vicini con la curva data. — La parte quarta sulle striscie superficiali del 1° e del 2° ordine aderenti ad una curva può ritenersi in buona parte originale sia per l'organizzazione sia per lo studio sistematico delle configurazioni invarianti legate agli intorni dei vari ordini. — Si tratta in sostanza di un volume eccellente per chiarezza di esposizione, per precisione e per semplicità dell'algoritmo adottato: le poche nozioni preliminari richieste sono raccolte alla fine del volume (che si sarebbe potuto alleggerire di molte nozioni elementari sparse nel testo). Ad aumentarne il valore serve anche la bibliografia che completa fino al 1948 quella data da in Fubini-Čech „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces“ (Gauthier-Villars, 1931).

E. Bompiani (Roma).

Schafer, Alice T.: The neighborhood of an undulation point on a space curve. Amer. J. Math. **70**, 351—363 (1948).

Per una curva sgheemba C vengono determinati sviluppi canonici locali relativi all'intorno di un punto O di ondulazione: ad essi si collega la considerazione di una rigata cubica avente in O 17 punti infinitamente vicini in comune con C e contenente la tangente a C in O come retta doppia. Viene pure precisato il comportamento, in prossimità di O , della sezione del piano iperosculatore sia con la sviluppabile circoscritta a C che con il cono proiettante C da un punto generico: la curva piana che così si ottiene ha pure in O un punto di ondulazione ed ha ivi con C contatto 4-punto nel 1° caso e 5-punto nel 2° caso.

P. Buzano (Torino).

Hsiung, Chuan-Chih: Differential geometry of a surface at a parabolic point. Amer. J. Math. **70**, 333—344 (1948).

L'A. studia una superficie nell'intorno di un suo punto parabolico (a tangenti asintotiche coincidenti) distinguendo i casi in cui la sezione piana tangente ha nel punto di contatto: 1. una cuspid; 2. un tacnodo; 3. un tacnodo con un ramo inflessionale; 4. un tacnodo armonico; 5. un tacnodo con due rami inflessionali. Per ogni caso vengono dati sviluppi canonici (facendo particolare uso dei coni di Moutard associati alle tangenti per il punto).

E. Bompiani (Roma).

Blank, Ja. P.: Konjugierte Netze von konischen Linien. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 755—758 (1949) [Russisch].

L'A. se propose de déterminer les surfaces ayant non seulement un réseau de lignes conjuguées coniques (ou un nombre fini de tels réseaux) mais une infinité: le nombre maximum, ∞^4 , est, comme on sait, obtenu par les quadriques, ces réseaux étant même chacun deux fois réseaux conjugués de Koenigs. Le cas ∞^3 n'est jamais réalisé. L'A. détermine toutes les surfaces ayant ∞^2 réseaux conjugués coniques: elles sont réglées, leurs génératrices appartiennent à une congruence linéaire et, par transformation homographique (réelle ou imaginaire) ces surfaces sont réductibles aux types suivants:

$$(1) \quad z = (y/x)^n, \quad (2) \quad z = \log(y/x), \quad (3) \quad z = y/x + x^2, \quad (4) \quad z = y/x + \log x.$$

La troisième surface est la célèbre surface réglée de degré 3 dite surface de Cayley. En prenant son équation sous la forme équivalente $z = 2xy - x^3$, on voit qu'à titre de surface ayant ∞^2 réseaux conjugués coniques, on peut donner la représentation, où λ, μ sont les coordonnées paramétriques, et h, m deux constantes arbitraires

$$x = \lambda^2 - \mu^2, y = \lambda^3 - \mu^3 + h(\lambda - \mu) - m/2, z = \lambda^4 - \mu^4 + 2h(\lambda^2 - \mu^2) - m(\lambda + \mu), t = \lambda - \mu.$$

Les sommets des cônes circonscrits sont répartis sur les cubiques gauches

$$\xi_1 = 2\lambda, \eta_1 = 3\lambda^2 + h, \zeta_1 = 4\lambda^3 + 4h\lambda - m, \tau_1 = 1,$$

$$\xi_2 = 2\mu, \eta_2 = 3\mu^2 + h, \zeta_2 = 4\mu^3 + 4h\mu + m, \tau_2 = 1.$$

Circonstance remarquable: pour $m = 0, h$ quelconque, ces deux cubiques coïncident et forment, quand h varie, l'ensemble des asymptotiques curvilignes de la surface; des plus la surface de Cayley coïncide, propriété connue depuis longtemps, avec le lieu des milieux des sécantes doubles de l'une quelconque de ses asymptotiques, de sorte qu'elle admet ∞^1 réseaux conjugués de translation, par les formules paramétriques

$$x = \lambda + \mu, y = \frac{3}{2}(\lambda^2 + \mu^2) + h, z = 2(\lambda^3 + \mu^3) + 2h(\lambda + \mu).$$

On peut remarquer que le premier type donné par l'A. est, si $n = 2$, la surface réglée générale d'ordre 3 (à deux directrices rectilignes distinctes): parmi les ∞^2 réseaux coniques conjugués qu'elle possède, il y en a ∞^1 , qui, comme pour la surface de Cayley, donnent pour sommets des cônes circonscrits, les asymptotiques de la surface. On a aussi la propriété suivante: Toute section conique d'une surface réglée de degré 3 est coupée par une asymptotique non rectiligne en deux points se correspondant involutivement. — La méthode de recherche de l'A. suppose la surface rapportée à ses lignes asymptotiques et utilise les invariants connus de la géométrie projective différentielle. L'A. n'a pas abordé, l'étude du cas où la surface admet ∞^1 réseaux coniques. Dans un travail antérieur, il a donné des exemples d'un nombre fini de réseaux coniques.

B. Gambier (Paris).

Strubecker, Karl: Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Math. Z., Berlin 52, 401—435 (1949).

Nach einer Besprechung der Geschichte der von Lie inaugurierten Erforschung der in der Überschrift gekennzeichneten Flächen werden zunächst deren allgemeine projektiven Eigenschaften entwickelt; insbesondere wird gezeigt, daß ihre Asymptotenlinien aus irgendeiner von ihnen durch windschiefe kollineare Schiebungen längs einer beliebigen der anderen Schar erzeugt werden können. Je nach dem Charakter der Mannigfaltigkeit der Schiebungsachsen zerfällt die Gesamtheit der Flächen in drei Klassen; demgemäß erweist sich die Heranziehung einer elliptischen, quasielliptischen oder isotropen Metrik als zweckentsprechend für die weitere Untersuchung. Die genannten Kollineationen sind dann Cliffordsche Schiebungen: sie können mittels Hamiltonscher Quaternionen, eines von Study betrachteten Grenzfalls dieser komplexen Größen oder eines vom Verf. schon früher benutzten Grenzfalls dieser Studyschen Zahlen analytisch dargestellt werden. Die Flächen erweisen sich als solche von der Relativkrümmung -1 in ihrem metrischen Raum: ihre Asymptotenlinien haben in ihm die Torsion ± 1 . Die Flächen können als Cliffordsche Schiebflächen in ihrem Raum erzeugt werden. Dies führt zu ihrer integrallosen Darstellung; eine solche wird für die Normgestalten, denen alle anderen projektiv verwandt sind, angegeben. Zur Klärung von Realitätsfragen werden schließlich noch indefinite Gegenstücke der elliptischen und quasielliptischen Räume eingeführt.

Löbbl (München).

Grove, V. G.: Pairs of rectilinear complexes. Amer. J. Math. 70, 364—374 (1948).

L'A. studia una coppia Γ_1, Γ_2 di complessi di rette in corrispondenza biunivoca: se g_1 e g_2 sono generatrici corrispondenti di Γ_1 e Γ_2 esse possono essere sghembe o

incidenti. Nel 1° caso, introdotti i fasci di complessi lineari che osculano rispettivamente Γ_1 e Γ_2 lungo g_1 e g_2 , si considera nel 1° fascio il complesso contenente g_2 e nel 2° fascio il complesso contenente g_1 ; si distingue poi ulteriormente secondo che la congruenza lineare comune a detti complessi è generale o speciale. In ogni caso l'A. determina un riferimento proiettivo locale e definisce elementi geometrici covarianti.

P. Buzano (Torino).

Korovin, V. I.: Transformation eines Geradenkomplexes im projektiven Raum mit Erhaltung seiner invarianten Form. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **70**, 753—755 (1950) [Russisch].

L'A. étudie le complexe décrit par l'arête $r_{12} = [A_1 A_2]$ du tétraèdre de sommets A_1, A_2, A_3, A_4 . Les déplacements infinitésimaux du tétraèdre sont définis par $dA_i = \omega_i^k A_k$, les ω_i^k étant des formes de Pfaff et $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ les composantes principales du premier ordre du déplacement infinitésimal du tétraèdre, liées par une relation linéaire pouvant, par déplacement convenable de A_1, A_2 sur l'arête, de A_3, A_4 dans l'espace, recevoir la forme $\omega_1^4 + \omega_3^4 = 0$. Les composantes principales du second ordre ont la forme $\omega_1 = \alpha \omega_1^3 + \beta \omega_2^3 + \gamma \omega_2^4$, $\omega_2 = \beta \omega_1^3 + \eta \omega_2^3 + \beta_1 \omega_2^4$, $\omega_3 = \gamma \omega_1^3 + \beta_1 \omega_2^3 + \alpha_1 \omega_2^4$ où $\omega_1 = \omega_3^4 - \omega_2^4$, $\omega_2 = \omega_1^4 - \omega_2^4 + \omega_3^4 - \omega_4^4$, $\omega_3 = \omega_1^4 - \omega_2^4$. Il existe deux formes invariantes $\varphi = \omega_1^3 \omega_2^4 + (\omega_2^3)^2$, $f = 3\psi - (\eta + 4\gamma)\varphi$ où $\psi = \omega_1 \omega_1^3 + \omega_2 \omega_2^3 + \omega_3 \omega_2^4$. Des formes φ et f , on déduit une forme invariante absolue $I_1 = f^3/\varphi$. Théorème: Si, entre les rayons de deux complexes r_{12} et r'_{12} existe une correspondance biunivoque et si les formes invariantes absolues I_1, I'_1 sont égales, les deux complexes sont projectivement équivalents. L'égalité $I_1 = I'_1$ conduit à deux systèmes distincts

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Omega_1^3 = \omega_1^3, \quad \Omega_2^3 = \omega_2^3, \quad \Omega_2^4 = \omega_2^4, \quad \omega_1^4 = \Omega_1^4, \quad \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \\ & \eta - 2\gamma = \eta' - 2\gamma', \quad \beta_1 = \beta'_1, \quad \alpha_1 = \alpha'_1; \\ (2) \quad & \Omega_1^3 = \omega_1^3, \quad \Omega_2^3 = \omega_2^3, \quad \Omega_2^4 = \omega_2^4, \quad \Omega_1^4 = \omega_1^4, \quad \alpha = -\alpha', \quad \beta = -\beta', \\ & \eta - 2\gamma = -\eta' + 2\gamma', \quad \beta'_1 = -\beta_1, \quad \alpha_1 = -\alpha'_1. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, toutes les formes ω_i^k et Ω_i^k coïncident, dans le second cas on peut, par une corrélation, transformer r_{12} en r'_{12} . La déformation d'un complexe, par opposition à l'égalité, revient à supposer $I' = qI$ et revient au système

$$\Omega_1^3 = \Omega_2^3 = \Omega_2^4 - \Omega_1^4 = 0, \quad \Omega_1 = q \omega_1, \quad \Omega_2 = q \omega_2, \quad \Omega_3 = q \omega_3 \text{ avec } \Omega_i^k = \Omega_i^k - \omega_i^k.$$

Les complexes se distinguent par la disposition sur le rayon $[A_1 A_2]$ des quatre centres inflexionnels: 4 confondus (le complexe est déformable); 3 confondus (le complexe n'est pas nécessairement déformable); superposition par couples des 4 centres (le complexe est déformable); 2 confondus, les 2 autres distincts (le complexe n'est pas nécessairement déformable); les 4 centres distincts (le complexe n'est pas nécessairement déformable). — L'égalité ou la déformation des complexes au sens de Cartan est un cas particulier de celle qui est étudiée dans cette Note.

B. Gambier (Paris).

Samuel, P.: On conformal correspondence of surfaces and manifolds. Amer. J. Math. **69**, 421—446 (1947).

Scopo del presente lavoro è di determinare le coppie di varietà ad n dimensioni, immerse in uno S_N euclideo, che si possano porre in corrispondenza conforme, tale che in punti omologhi gli S_n tangenti siano (totalmente) paralleli. Per $n = 2$, $N = 3$, il problema fu risolto da Christoffel [Über einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen, J. reine angew. Math. **67**, 218—228 (1867)], il quale trovò che — a prescindere dal caso banale dell'omotetia, le due superficie sono ad area minima, oppure le loro linee di curvatura formano una rete isoterma. — Come già il Christoffel, l'A. considera l'operatore lineare fra vettori corrispondenti in spazi tangenti omologhi, e assume, sulle due varietà, quali direzioni coordinate le direzioni principali del suddetto operatore. In generale, naturalmente, il sistema di riferimento

adottato sarà anolonomo, e quindi entra in considerazione l'oggetto di anolonomia: e punti corrispondenti avranno le stesse coordinate (generalmente anolonomie). — Il lavoro è diviso in nove paragrafi, come segue: dopo il I, che serve di introduzione, nel II e nel III vengono stabilite le proprietà fondamentali dell'operatore, dapprima supponendo solo che in punti corrispondenti le due varietà abbiano spazi tangenti paralleli, e poi limitandocisi al caso conforme; nel IV, si passano in rassegna vari tipi di varietà di S_N Euclideo, delle quali si avrà bisogno nel seguito. — Nel V n. ha inizio la ricerca vera e propria; tale n. è dedicato alle superficie immerse in un S_N , con $N \geq 3$; si hanno — in questo come nei casi successivi — casi differenti a seconda della realtà o meno delle direzioni coordinate; ma i risultati ottenuti non sono che una generalizzazione di quelli del Christoffel; ottenendosi, o superficie di traslazione generate da curve isotrope, ovvero superficie possedenti un sistema coniugato ortogonale. Nel paragrafo seguente, si studia il caso in cui (per n qualsiasi) le direzioni principali siano tutte reali; ci si può ridurre al caso olonomo e si dimostra che le varietà in questione appartengono solo a una classe assai ristretta; nel caso particolare che una delle due varietà sia un'ipersfera, l'unica soluzione del problema è data, oltre che dalle ipersfere stesse, da una generalizzazione del catenoide di rivoluzione. — Se non tutte le direzioni principali sono reali, non sempre ci si può ridurre al caso olonomo; nel caso tri-dimensionale olonomo, studiato nel n. VII, l'A. ottiene addirittura le equazioni parametriche delle coppie di varietà soluzione del problema; nel caso non-olonomo (sempre per $n = 3$), l'A. riesce a dare solo condizioni necessarie e sufficienti per i due ds^2 e per le seconde forme fondamentali. — Il n. VIII è dedicato al caso generale olonomo, ma con direzioni coordinate non tutte reali; il problema può essere completamente risolto, e dà luogo a diversi sottocasi a seconda che vi sia una o più coppie di direzioni coordinate isotrope; ma in sostanza si hanno sempre generalizzazioni delle superficie di traslazione, e delle varietà di cui al n. VII. — L'ultimo n. è finalmente dedicato all'ipotesi in cui la corrispondenza sia isometrica: la corrispondenza fra spazi omologhi è allora una rotazione; e tale che, decomposta in rotazioni in piani a due a due ortogonali, gli angoli di tali rotazioni sono costanti: ciò si ottiene servendosi di lemmi sulle geodetiche e sulle coordinate geodetiche. Stabilito questo risultato nel caso generale, l'A. prova che per $n = 3$, $n = 4$, ci si può ridurre al caso olonomo, cosicchè si è ricondotti a problemi già trattati nei nn. precedenti. Inoltre, per n qualsiasi, ci si può ridurre al caso olonomo se vi sono almeno due differenti angoli di rotazione.

V. Dalla Volta (Roma).

Terracini, Alessandro: Su una proprietà differenziale conforme di certi sistemi triplamente infiniti di curve. Rend. Sem. mat. Torino 8, 227—240 (1949).

Let Σ be a system ∞^3 of curves C , lying on a plane, or else on any surface S , and consider the ∞^1 curves C through two generic points A, B ; if the pencils of the tangents in A, B to these $\infty^1 C$'s are directly or inversely equal, we will say, according to the A., that Σ has the „property of equality“ (U -property) and, for sake of brevity, we call Σ a U -system. — The A. proves that a system ∞^3 of curves is a U -system if and only if it may be obtained as the transform of the system Σ of the circles of a plane π in a conformal representation of π (on another plane or on any surface S). — The result is obtained by considering the more general case of determining the systems for which the U -property holds „approximately up to a certain order“. The exact meaning of this expression may not be cleared in a few words; is it enough to say that, if B is infinitely near to A , the U -property holds for any system ∞^3 of curves approximately up to the first order; but, if it holds up to the second order, it holds in the finite sense, and the system is a U -system. In order to prove this, the A. considers the differential equation of the third order, having the curves C as integral curves; by means of this equation, it is possible to express the U -condition in terms of the coordinates (x_0, y_0) ; (x, y) of A, B ; if we pose $x = x + h$, we obtain an expression which — in general — is infinitely small of the 2nd order

with respect to h ; but, for particular forms of the differential equation, it is possible that the a. m. expression is infinitely small of a higher order: in this case the corresponding integral curves have the U -property approximately of the 1st order; but for even more particular forms of the equation, this order of infinitesimal can be still higher; in this case the U -property holds approximately up to the 2nd order; and, as the resulting differential equation of the 3rd order may be always obtained through a suitable conformal transformation by the differential equation of the circles, the theorem is proved. The extension to any surface is then obvious. — The A. investigates also the curves for which the U -property holds only approximately, and gives for them many geometrical characterizations, that is impossible to quote here, for reasons of brevity. They are obtained by considering certain configurations attached to particular kinds of differential equations of the 3rd order [cf. A. Terracini: *Caracterizaciones geométricas de la ecuación (G) subordinada a una ecuación diferencial de tipo (F)*; *Rev. Univ. nac. Tucuman A* **6**, 255—261 (1948); *Aportes al estudio geométrico de la ecuación diferencial $y''' = f(x, y, y') + G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$* , *ibid.* **3**, 195—234 (1942); *Sobre la ecuación diferencial $y''' = G(x, y, y') y'' + H(x, y, y') y'^2$* , *ibid.* **2**, 245—329 (1941); some of these characterizations had been found by a quite different way, by Kassner and de Cicco [*Trans. Amer. math. Soc.* **49**, 378—391 (1941); this *Zbl.* **25**, 84].

V. Dalla Volta (Roma).

Feld, J. M.: A kinematic characterization of series of lineal elements in the plane and of their differential invariants under the group of whirl-similitudes and some of its subgroups. *Amer. J. Math.* **70**, 129—138 (1949).

If T_α represents the transformation that rotates every oriented lineal element in the plane through the same angle α about its point, S_k a sliding of every element over a distance k along its line, $T_\alpha S_k T_\beta$ is a whirl [Kasner, *Amer. J. Math.* **33**, 193—202 (1911)]. These transformations form a 3-parameter group \mathcal{G}_3 . The product of a whirl and a motion is called a whirl-motion (6-parameter group \mathcal{G}_6). The product of a whirl and a similitude is a whirl-similitude (a \mathcal{G}_7). The author uses as coordinates $z = x + iy$. If the point of an element is denoted by z , the direction by θ , the equation $z = z(\theta)$ defines a set of elements called a series S . A complete set of differential invariants of a series under each of the three groups is given. Every S defines a motion in the plane if one looks upon the set S as the ∞^1 positions of a fixed line element of a moving plane. This is the reason why the differential invariants can be given simple kinematic characterizations. J. Haantjes.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Segre, Beniamino: Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. IV. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. **7**, 12—15 (1949).

Es wird gezeigt: Wenn ein Riemannscher Raum V_n derart auf einen euklidischen Raum R_n abgebildet werden kann, daß die geodätischen Linien der V_n mit Geraden des R_n korrespondieren und die Abbildung überdies konform ist, so ist die V_n notwendig eine V_n konstanter Krümmung. In einer früheren Arbeit (dies. *Zbl.* **34**, 250) hat Verf. schon gezeigt, daß jede V_n konstanter Krümmung sich derart auf einen R_n abbilden läßt, daß die geodätischen Linien in Geraden transformiert werden. Es werden fünf Typen von Abbildungen angegeben und geometrisch interpretiert, zwei für $K = 0$, zwei für $K < 0$ und einer für $K > 0$ (K ist die Gaußsche Krümmung der V_n). Diese Abbildungen sind für $n \geq 3$ auch die einzigen konformen Abbildungen einer V_n konstanter Krümmung auf einen R_n . Haantjes.

Narlikar, V. V. and Ayodhya Prasad: Canonical co-ordinates in general relativity. *Bull. Calcutta math. Soc.* **40**, 123—128 (1948).

Die Metrik der Raumzeitwelt wird beschrieben in bezug auf ein System von zu irgendeinem Punkte gehörigen Riemannschen Normalkoordinaten, und diese werden so gewählt, daß im Ursprung $g_{\lambda\kappa}$ die Normalform bekommt. In zweiter Näherung ergeben sich dann Ausdrücke für das Linienelement, die Krümmungsgröße und die Konformkrümmungsgröße in der Nähe des Ursprungs. Die sich ergebenden Feldgleichungen und Gleichungen der geodätischen Linien werden diskutiert.

Schouten (Epe).

Narlikar, V. V. and K. P. Singh: Gravitational fields of spherical symmetry and Weyl's conformal curvature tensor. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII, S. 41, 152—156 (1950).

Bekanntlich läßt sich in V_n der konforme Krümmungsaffinor $C_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ in den gewöhnlichen $K_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$ und dem Ricci-Tensor $K_{\mu\lambda}$ ausdrücken. Für $n=4$ haben diese Größen 10, 20 und 10 Bestimmungszahlen. Für den Fall einer allgemeinen sphärisch symmetrischen Metrik

$$ds^2 = -e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) + e^{\nu(r,t)} dt^2$$

werden die Bedingungen $C_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa} = 0$ und $\nabla_{\kappa} C_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa} = 0$ untersucht. Es zeigt sich dabei, daß in diesem speziellen Falle jedes Feld, das der zweiten Bedingung genügt, auch die erste erfüllt, und daß also alle Lösungen, die mit der zweiten Bedingung verträglich sind, eine konformeuklidische Raumzeitwelt ergeben. Die einzige physikalisch bedeutsame Lösung ist die Schwarzschildsche für den inneren Teil einer Flüssigkeitskugel.

Schouten (Epe).

Norden, A.: Konforme Interpretation des Weylschen Raumes. Mat. Sbornik, II. S. 24, 75—85 (1949) [Russisch].

Verf. knüpft in vorliegender Arbeit vor allem an die Ergebnisse und Begriffsbildungen einer früheren Arbeit an [vgl. A. Norden, Rec. Math., Moscou, n. S. 20, 263—281 (1947)]. Ein Unterraum von m Dimensionen X_m eines projektiven Raumes P_n wird „normalisiert“ genannt, wenn jedem Punkt M von X_m zwei Unterräume P_{n-m} und P_{m-1} zugeordnet sind, von welchen P_{n-m} nur den Punkt M mit der m -dimensionalen Tangentialhyperebene an T_m gemeinsam hat und P_{m-1} zwar in T_m liegt, jedoch nicht durch den Punkt M geht. Diese beiden Räume werden Normalräume der ersten und zweiten Art genannt. Die Geometrie längs X_m hängt offenbar von der Wahl dieser Räume ab. Sind $x^\alpha = x^\alpha(u^i)$; $\alpha = 1, \dots, n+1$; $i = 1, \dots, m$ homogene Koordinaten in X_m , so ist P_{m-1} durch die m linear unabhängigen Punkte

$$y_i^\alpha = \partial_i x^\alpha - l_i x^\alpha, \quad \partial_i x^\alpha = \partial x^\alpha / \partial u^i,$$

bestimmt, und für die Ableitungen $\partial_j y_i^\alpha$ gelten die Ableitungsgleichungen

$$\partial_j y_i^\alpha = L_{ij}^\alpha y_\alpha^\alpha + p_{ij} x^\alpha + b_{ij}^\sigma X_\sigma^\alpha.$$

Mit den Koeffizienten $L_{ij}^\alpha = L_{ij}^\alpha - l_j \delta_i^\alpha$ erhält Verf. den inneren Zusammenhang der Mannigfaltigkeit X_m . Im Falle $m=n$ werden die geodätischen Linien dieser Übertragung identisch mit den Geraden des P_n , und dessen innere Geometrie ist die projektive-ebene Geometrie. Sind P_{n-m} und P_{m-1} reziprok polar in bezug auf die Hyperquadrik Q_{n-1} , so ist der innere Zusammenhang eine Übertragung von Weyl, deren Winkelmessung durch die projektive Metrik von Q_{n-1} gegeben wird. Mit der projektiven Behandlung dieser Zuordnungen eng verwandt ist die kugelgeometrische Behandlung. An Stelle des projektiven Raumes P_n tritt der Möbius-Raum M_n , und sein m -dimensionaler Unterraum X_m heißt normalisiert, wenn zu jedem Punkt M von X_m eine $(n-m)$ -dimensionale Hypersphäre S_{n-m} durch M zugeordnet ist, welche zu X_m totalnormal ist. Auch in diesem Falle ergibt sich als innerer Zusammenhang für X_m eine Weylsche Übertragung, deren Winkelmessung wiederum durch Q_{n-1} bestimmt wird. Wenn jedem Punkt M ein anderer assoziiert wird vermöge einer Inversion, wird dieser innere Zusammenhang eine Riemannsche Übertragung von konstanter Krümmung. Zu jeder Richtung in X_m findet sich die zugehörige „Stützhypersphäre“, die zu dieser Richtung orthogonal ist und S_{n-m} enthält; den ∞^1 Richtungen einer Kurve entspricht so der Richtungskreis dieser Tangentenfolge (der zu je zwei benachbarten Stützhypersphären orthogonal ist). Im Falle $n=m$ läuft die Normalisierung darauf hinaus, daß jedem Punkt M eines gewissen Gebietes ein gewisser anderer Punkt N ($N = S_{n-m} = S_0$) zugeordnet wird, derart, daß die Stützhypersphäre beide Punkte enthält, und ebenso der Richtungskreis der parallelübertragenen Richtung und der Berührungskreis der geodätischen Linie des inneren Zusammenhanges. Zur analytischen Darstellung verwendet Verf. $n+2$ homogene polysphärische Koordinaten. k linear unabhängige Hypersphären bilden ein

$(k-1)$ -dimensionales Bündel. Zu jedem Punkt der normalisierten X_m gehören $n+2$ unabhängige Hypersphären (der Punkt selbst ist dabei eine ausgeartete Hypersphäre). Mit einer solchen Basis entwickelt Verf. sodann Ableitungsgleichungen und gewinnt die die Winkelmetrik auf X_m bestimmende Differentialform. Unter Verwendung der Komponenten des inneren Zusammenhanges von X_m lassen sich die Ableitungsgleichungen kovariant schreiben (Ersatz der gewöhnlichen Ableitungen durch kovariante). Kovariante Differentiation des Tensors $a_{ij} = -g_{ij}$ der Winkelmetrik ergibt: $\nabla_k g_{ij} = 2l_k g_{ij}$. Damit ist gezeigt: die Metrik des „äußeren“ Raumes induziert eine Weylsche Übertragung als inneren Zusammenhang von X_m . Für $n = m$ vereinfachen sich die kovarianten Ableitungsgleichungen wesentlich, da jetzt die Einführung von Hilfs-hypersphären entfällt. Nunmehr sind die Integrabilitätsbedingungen der Ableitungsgleichungen zu untersuchen. Verf. behandelt dabei vornehmlich den Fall $n = m$. Von besonderem Interesse sind involutorische Zuordnungen, die zu einer kanonischen Normierung führen. In diesem Falle erweisen die Integrabilitätsbedingungen den inneren Zusammenhang des normalisierten Raumes als einen Riemannschen, konform-euklidischen. Von besonderer Bedeutung ist der Fall, in welchem die Zuordnung der Punktepaare der Normalisierung durch eine Inversion bezüglich einer festen Hypersphäre A erfolgt. Für die polysphärischen Vektoren X, x zugeordneter Punkte gilt in diesem Falle $X = f x + A$ und wegen der Normierung $A x = 1$ und $X^2 = 0$ folgt $f = -A^2/2$ mit konstantem f , positiv, negativ oder Null, je nachdem die Hypersphäre A reell, imaginär oder eine Punkthypersphäre ist. Wiederum gelangt man zu einer Geometrie konstanter Krümmung. Eine Verallgemeinerung ergibt sich, indem man die Inversion an einer festen Hypersphäre durch solche bezüglich einer Schar fester Hypersphären ersetzt, insbesondere durch ein $(n-k)$ -dimensionales Bündel derartiger absoluter Hypersphären. Für diese Untersuchungen empfiehlt sich die Wahl eines speziellen Koordinatensystems, das mit Hilfe der Gesamtheit der zu allen Hypersphären eines absoluten Bündels orthogonalen Hypersphären gebildet wird. Diese Hypersphären bilden selbst ein k -dimensionales Bündel, das zum absoluten Bündel komplementäre Bündel. Verf. bestimmt auf diese Weise das Linienelement der inneren Geometrie des Raumes mit einem Bündel absoluter Hypersphären in der Form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta + F(u^1, u^2, \dots, u^{n-k}) \gamma_{\sigma\varrho} du^\sigma du^\varrho; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-k, \\ \sigma, \varrho = n-k+1, \dots, n,$$

wobei die Größen $g_{\alpha\beta}$ nur von u^1, \dots, u^{n-k} abhängig sind und eine willkürliche konform-euklidische Metrik bestimmen und die Größen $\gamma_{\sigma\varrho}$ nur von u^{n-k+1}, \dots, u^n abhängig sind und eine Metrik von konstanter Krümmung bestimmen. Aus der Form dieses Linienelementes ergibt sich, daß der betrachtete Raum eine $k(k+1)/2$ -gliedrige Gruppe von Transformationen in sich selbst zuläßt. Im Sinne der Terminologie von V. F. Kagan erweisen sich diese Räume als $(k-1)$ -fach projektive Räume. Für $k = n-1$ ergeben sich die von F. Schur, V. F. Kagan, P. A. Širokov und P. K. Raševskij untersuchten Räume. M. Pinl (Dacca).

Varga, O.: Affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, die ein Inhaltsmaß besitzen. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 868—874 (1949); Indag. math., Amsterdam 11, 316—322 (1949).

Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine affinzusammenhängende Linienmannigfaltigkeit ein Inhaltsmaß besitzt, und es werden einige Spezialfälle angegeben. Es gibt auch Mannigfaltigkeiten, für die ein Inhaltsmaß im gewöhnlichen Sinne (unabhängig von einem Richtungsfeld) existiert. Zwei Fälle dieser Art werden angegeben. J. Haantjes (Leiden).

Urban, A.: On the geometry of a system of partial differential equations of the second order. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 855—867 (1949); Indag. math., Amsterdam 11, 303—315 (1949).

Una teoria affine (e anche, in parte, proiettiva) del sistema completamente integrabile

$$(1) \quad \partial_{\mu\lambda}^2 z = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \partial_\nu z + \Gamma_{\mu\lambda} z$$

nella funzione incognita z e nelle variabili indipendenti ξ^ν ($\lambda, \mu, \nu = 1, \dots, n$) era stata data da A. Maxia [Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 1, 169—174 (1946)]. — Posto $\xi^0 = -\log z$ il sistema (1) si muta nell'altro

$$(2) \quad \partial_{\mu\lambda}^2 \xi^0 - (\partial_\mu \xi^0)(\partial_\lambda \xi^0) = \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \partial_\nu \xi^0 - \Gamma_{\mu\lambda}$$

che l'A. studia rispetto alle trasformazioni

$$\xi^{0'} = \xi^0 - \log \varrho(\xi^\nu); \quad \xi^{\nu'} = \xi^\nu(\xi^\nu), \quad \text{Det.} \left(\frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^\nu} \right) \neq 0.$$

Nella X_{n+1} delle ξ^α , $\alpha = 0, 1, \dots, n$, sono invarianti: 1) una congruenza di curve (∞^n)

per cui $\xi^\alpha = \text{cost.}$; 2) una classe di vettori per cui la sola componente per cui $\alpha = 0$ è $\neq 0$. — Si dia nella X_{n+1} una connessione affina simmetrica $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n)$, in modo da farne una A_{n+1} . Una X_n , $\xi^0 = f(\xi^2)$, è geodetica in A_{n+1} per una ben determinata classe di connessioni, determinata a meno di trasformazioni proiettive (dipendenti da un vettore arbitrario) aventi il tensore di curvatura proiettiva nullo. — L'A. determina poi le connessioni per le quali: 1) le curve della congruenza invariante sono pseudoparallele; 2) le X_n , $\xi^0 = f(\xi^2) + c$ sono pseudoparallele; 3) le due condizioni precedenti sono soddisfatte. — L'A. studia poi per questa via la connessione e il tensore già introdotti dal Maxia per la (1); e infine ritrova (per $\xi^{0'} = \xi^0$) il sistema coniugato ad (1) secondo L. Bianchi. *E. Bompiani (Roma)*.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Choquet, Gustave: Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes. *J. Math. pur. appl.*, Paris, IX. S. 26, 115—226 (1948).

Ce mémoire présenté comme Thèse à la Faculté des Sciences de Paris constitue une remarquable contribution à la Théorie des Fonctions de Variable Réelle suivant Lebesgue, Baire et Denjoy dans le sens de la Géométrie Infinitésimale Directe de Bouligand. Le chapitre I est consacré à l'étude de la classe d'une application et des propriétés topologiques de la fonction contingent. Soient deux espaces topologiques quelconques E et E' ; une correspondance (au sens de A. Weil) entre E et E' est envisagée suivant Kuratowski comme une application f de E dans l'espace des sous-ensembles de E' . Si E est compact (au sens de Bourbaki), E' métrique et compact et la correspondance semi-continue supérieure ou inférieurement (selon Kuratowski), f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait P de E (Note du Réf.: La propriété est établie explicitement dans le cas de la semi-continuité supérieure. Il est indiqué qu'un raisonnement analogue s'applique au cas de la semi-continuité inférieure. Le Réf. n'est pas parvenu à reconstituer la démonstration). Si E est un ensemble fermé de l'espace euclidien R , $C_\rho(M)$ la fermeture de l'ensemble des rayons MP joignant M aux points de E à une distance $\delta(PM) < \rho$, pour ρ fixe $C_\rho(M)$ possède la semi-continuité inférieure d'inclusion; le contingent $C(M) = \lim C_\rho(M)$ pour ρ tendant vers 0. Si P est un ensemble parfait de R et s'il existe un entier n et un nombre $\lambda_0 > 0$ tels que, en tout point M de P le contingent $C(M)$ de E soit contenu dans une variété linéaire $L_n(M)$ à n dimensions et contienne n rayons dont les directions aient un coefficient d'indépendance linéaire $\lambda > \lambda_0$, alors la variété $L_n(M)$ est une fonction ponctuellement discontinue de M sur P et sur tout sous-ensemble parfait de P . En particulier si $n = 1$, il n'est plus nécessaire de postuler l'existence du nombre λ_0 . Un contre-exemple pour $n = 2$ montre que dans le cas général ce postulat est indispensable (Note du Réf.: Sans lui, L_n est une fonction de seconde classe). Le théorème précédent est étendu à des ensembles euclidiens paramétrés $\mathfrak{T}: M = T(m)$, le paramètre m décrivant un espace topologique et l'application T dans R étant continue. Le cas particulier où \mathfrak{T} a un contingent partout porté par une droite de direction $g(m)$ est étudié en détail, E étant supposé compact, puis compact et localement connexe. Des propriétés de connexité pour $T(E)$ sont données lorsque la direction $g(m)$ est fixe. Le chapitre I contient en somme une extension de la Théorie de Baire aux fonctions multiformes suivie d'applications aux fonctions contingent et paratingent. Ainsi que le remarque l'A., la théorie précédente peut être unifiée et simplifiée en considérant les contingents et paratingents abstraits du Réf. [*C. r. Acad. Sci.*, Paris 206, 1242—1244 (1938); ce *Zbl.* 18, 376]. En fait à la fin du chapitre III, il adopte ce point de vue pour énoncer un théorème fondamental synthétisant un mode de raisonnement fréquemment employé; il s'agit d'une généralisation de la propriété euclidienne suivant: Sur tout ensemble parfait, il existe un point en lequel le contingent possède la semi-continuité supérieure d'inclusion; et même il existe un point en lequel le paratingent est continu et identique au contingent. [Note du Réf.: La profonde remarque de l'A. à savoir que sa théorie fait appel non à la notion de fonction ponctuellement discontinue mais à celle de correspondance ponctuellement semi-continue se trouve confirmée par les travaux de R. Brisac; ce *Zbl.* 29, 321, 322] où sont étudiées les correspondances entre deux espaces topologiques E et E' sans passer par l'espace $2^{E'}$. Une double classification de Baire est définie reposant sur les deux notions de semi-continuité d'inclusion. Chacune d'elles joue pour les correspondances (fonctions multiformes) le rôle de la continuité à laquelle elle se réduit dans le cas d'une application.] Dans le chapitre II sont introduites deux fonctions $F(m)$ et $\alpha(m)$ à valeurs réelles définies en tout point d'un espace topologique E . F est dite admettre au point m , par rapport à $\alpha(m)$, une dérivée déterminée $g(m)$ finie ou infinie ($+\infty$ et $-\infty$ étant considérés comme un seul et même nombre), si le rapport $(F(m') - F(m))/(\alpha(m') - \alpha(m))$ tend vers $g(m)$ lorsque m' tend vers m en évitant les points qui annulent les deux termes du rapport. F et α sont supposées continues sur E . Le système des fonctions F et α est représenté géométriquement

par l'application continue T de E dans le plan xOy définie par $x = \alpha(m)$, $y = F(m)$. Les théorèmes établis au chapitre I permettent d'étendre à la dérivée $g(m)$ les propriétés classiques des fonctions dérivées. Le problème traité est le suivant posé par Lebesgue: Connaissant la dérivée $g(m)$, finie, infinie ou indéterminée d'une fonction inconnue $F(m)$ par rapport à une fonction connue $\alpha(m)$, retrouver par un procédé régulier la fonction $F(m)$ et toutes les fonctions admettant la même dérivée que $F(m)$ par rapport à $\alpha(m)$. Voici le théorème principal: Si E est un espace compact, toutes les fonctions $F(m)$ définies et continues sur E , qui admettent en tout point de E (sauf peut-être sur un ensemble au plus dénombrable) une même dérivée $g(m)$ finie ou indéterminée, par rapport à une même fonction continue $\alpha(m)$, se déduisent de l'une d'elles par l'addition d'une fonction continue qui est constante sur toute composante connexe de E , et dont l'ensemble des valeurs est un ensemble linéaire compact de mesure linéaire nulle. Un procédé régulier de calcul de la primitive est donné généralisant la totalisation de Denjoy. L'idée directrice consiste à montrer que sur tout ensemble parfait, il existe une portion sur laquelle $F(x)$ est une fonction uniforme de $\alpha(x)$; la considération de l'ensemble plan paramétré ramène à l'étude des propriétés différentielles d'un ensemble plan. Le chapitre III traite de la paramétrisation des courbes et des variétés. T représente désormais une application continue de l'intervalle ouvert $E = (0, 1)$ dans l'espace euclidien R_n . T est dite régulière en m s'il existe dans R_n une droite L_1 passant par $M = T(m)$ et telle que pour tout intervalle ouvert v de E contenant m , il existe un intervalle ouvert V de L_1 contenant M tel que, si δ désigne le diamètre de V , et ε l'écart de Fréchet entre V et $T(v)$, on ait $\lim(\varepsilon/\delta) = 0$ pour $\delta \rightarrow 0$. Le théorème suivant fournit la réponse à un problème posé par Fréchet [Fundam. Math., Warszawa 26, 234 (1936)]: Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit équivalente à une application positivement dérivable est que T soit régulière en tout point de E . Un procédé régulier de construction d'une application positivement dérivable équivalente à une application régulière est indiqué. Dans le cas d'une courbe \mathcal{C} image continue d'un intervalle fermé $[0, 1]$ en tout point de laquelle le contingent est porté par une seule droite, le point non régulier n'est autre que le point contrariant du Réf. (Thèse, 2me partie, Actual sci. industr., Paris 886 (1941); ce Zbl. 27, 136); l'ensemble \mathfrak{R} des points de rebroussement de \mathcal{C} est clairsemé, l'ensemble \mathcal{C}^* des points contrariants de \mathcal{C} est un $G_{\delta\sigma}$ non dense sur \mathcal{C} et de mesure linéaire nulle. Tout sous-ensemble dénombrable \mathcal{A} d'un ensemble parfait linéaire $P \subset [0, 1]$ peut être l'ensemble des valeurs non régulières du paramètre pour une courbe \mathcal{C} , d'où le théorème suivant: Si \mathcal{G} est un arc simple de R_n ayant en tout point une tangente ordinaire, il est en général impossible de trouver une paramétrisation partout dérivable de \mathcal{G} qui soit positivement dérivable en tout point régulier. Ayant ainsi répondu négativement à une question posée par le Réf. dans sa Thèse (loc. cit.), l'A. recherche des paramétrisations dérivables optima pour une courbe \mathcal{C} douée de tangentes. Il caractérise les applications équivalentes à une application dérivable, généralisant un théorème de Zahorski [communiqué à la Soc. Sci. Math. France, Séance du 21. XI. 1945; voir aussi Mat. Sbornik, n. S. 22 (64) 3—26 (1948)]: Une application continue T de l'intervalle $(0, 1)$ dans R_n est dite partiellement rectifiable sur le sous-ensemble parfait P lorsqu'il existe un intervalle D contenant des points de P et tel que l'application T ait sur $D \cdot P$ une mesure linéaire finie et que δ_i désignant le diamètre de l'image dans R_n d'un intervalle contigu à $D \cdot P$, la somme $\sum \delta_i$ étendu à tous les intervalles contigus soit finie; lorsque T est partiellement rectifiable sur tout ensemble parfait, T est dite partiellement rectifiable. La condition nécessaire et suffisante pour que T soit équivalente à une application dérivable est que T soit partiellement rectifiable. Il est remarquable que cette condition ne fasse pas intervenir la notion de dérivabilité. Un contre-exemple montre qu'un arc simple euclidien dont l'ensemble des points non réguliers est un ensemble fermé de mesure nulle situé sur une droite n'admet pas nécessairement une représentation paramétrique dérivable. Toutefois une application T dont le contingent en tout point laisse échapper une variété linéaire à $(n-1)$ dimensions, est une application partiellement rectifiable. Une application continue T de $(0, 1)$ dans R_n est dite ponctuellement rectifiable quand le rapport $M_1 M_2 m_1 m_2$ à une limite supérieure finie en tout point m_1 de $(0, 1)$ pour $m_2 \rightarrow m_1$ (Note du Réf.: Les définitions des termes „rectifiable” et „ponctuellement rectifiable” données pour un espace du paramètre m supposé seulement métrique ne semblent pas justifiées, la première ne coïncide plus avec la définition classique utilisée par l'A.). Il y a équivalence entre les trois classes d'applications: ponctuellement rectifiables, partiellement rectifiables, et dérivables. Les résultats précédents sont ensuite partiellement étendus à une application continue d'un domaine E de l'espace R_n dans R_n . La notion de régularité s'étend immédiatement. Celle d'application dérivable est à remplacer par celle d'application différentiable, la non-annulation du vecteur tangent à une courbe correspond à la non-dégénérescence de la différentielle. La condition exprimant que le Problème de Fréchet admet une solution est alors la même que dans le cas linéaire. L'ensemble des points contrariants d'une variété p -dimensionnelle dont le contingent en tout point est une variété linéaire à p dimensions est un $G_{\delta\sigma}$ non dense; un contre-exemple montre que sa mesure p -dimensionnelle n'est pas nécessairement nulle. Le chapitre IV est principalement consacré à la démonstration constructive du théorème suivant: Toute fonction $g(x)$ définie sur $[0, 1]$ qui est semi-continue inférieurement, possède la propriété de Darboux et est bornée en module, est topologiquement équivalente à une fonction dérivée,

entendant par là qu'il existe une transformation topologique $X \rightarrow X(x)$ du segment $[0, 1]$ en lui-même, telle que la fonction $g(X(x))$ soit une fonction dérivée. Cette caractérisation reste valable lorsque $g(x)$ n'est plus bornée en module et peut même prendre des valeurs infinies, mais satisfait à la condition suivante, évidemment nécessaire: L'ensemble des points en lesquels $g(x)$ est finie est partout dense sur $[0, 1]$. La fonction $g(x)$ est alors équivalente à une fonction dérivée sommable ayant une primitive absolument continue. Une construction générale des fonctions dérivées semi-continues bornées en module suit, puis une interprétation géométrique de la semi-continuité d'une fonction dérivée. L'ensemble des points où une fonction dérivée sur $[0, 1]$ prend une valeur infinie ou une valeur finie donnée est caractérisé comme un G_δ de mesure nulle. Le mémoire termine sur un procédé d'obtention de fonctions dérivées à partir de fonctions dérivées données. Une note ajoutée lors de la correction des épreuves énonce le résultat suivant: Pour toute fonction $g(x)$, $0 \leq x \leq 1$, de première classe possédant la propriété de Darboux, il existe une fonction continue strictement croissante $\alpha(x)$ telle que $g(\alpha(x))$ soit une fonction dérivée. [Note du Réf.: Ce théorème a été donné antérieurement par I. Maximoff, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. 12, 147—169 (1947)] Ce mémoire rappelle par la profondeur des idées mises en œuvre et le caractère exhaustif de l'étude les grands mémoires de Denjoy sur la dérivation des fonctions et la recherche des primitives. Les „constructions“ de l'A. sont du type de la totalisation de Denjoy. La non-validité d'un théorème quand une hypothèse est abandonnée, est illustrée par un contre-exemple. Bien que le Problème de Fréchet ait été seulement abordé pas ses devanciers, l'A. traite exhaustivement le cas linéaire et laisse prévoir des résultats aussi complets dans le cas de variétés de dimension > 1 , par exemple l'équivalence entre une application rectifiable au sens de Lebesgue et une application différentiable. Quelques critiques mineures ont déjà été notées; les suivantes peuvent être ajoutées: p. 127 — Il serait bon de préciser si le contingent est un ensemble de directions de demi-droites ou un ensemble de rayons; p. 184 — Le terme „positivement dérivable“ utilisé pour une application tangente en chaque point à une transformation linéaire non-dégénérée, ne semble pas heureux; p. 192 — Les éléments du contingent et du paratingent étant de nature différente, une assertion d'identité entre eux nécessite une explication. L'A. adopte en général la terminologie de Bourbaki en Topologie; notons qu'il a conservé l'expression „ponctuellement discontinu sur un ensemble parfait“. N'ayant pas introduit la notion de „point sur une courbe“ [Réf.: Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. 27, 166—172 (1938) et J. von Schwarz, Math. Ann., Berlin 115, 273—295 (1938); ce Zbl. 18, 220; 19, 87] il suppose Th. 12, p. 165 que C est un arc simple, nous avons plus haut énoncé le théorème sans cette restriction introduite seulement pour raisons linguistiques; la même remarque s'applique au Th. 14, p. 169 et au Th. 15, p. 170.

Chr. Pauc (Le Cap).

Rosenbaum, R. A.: Some characteristic properties of the circle. Math. Gaz., London 33, 273—275 (1949).

Bezüglich einer glatten konvexen geschlossenen Kurve C ist ein innerhalb von ihr liegender Punkt P (1) ein π -Punkt, wenn das Produkt der beiden Abschnitte, in die P eine beliebige durch ihn gehende Sehne teilt, von der Sehne unabhängig ist; (2) ein α -Punkt, wenn jede durch P gehende Sehne von C mit den Tangenten ihrer Endpunkte gleiche Winkel bildet; (3) ein β -Punkt, wenn die Mittelgeraden der durch P gehenden Sehnen von C einen Punkt gemeinsam haben. — Es werden die Sätze bewiesen: 1. Ein π -Punkt ist auch ein α -Punkt und umgekehrt. 2. Gibt es (mindestens) einen α -Punkt, oder (mindestens) zwei β -Punkte, oder mindestens je einen π -Punkt und β -Punkt (die abweichen oder zusammenfallen können), so ist die Kurve C ein Kreis.

Gyula Sz.-Nagy (Szeged).

Santaló, L. A.: Eine Affininvariante für die konvexen Kurven der Ebene. Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario 8, 103—111 (1948) [Spanisch].

Gegenüber den Affinitäten $x' = ax + by$, $y' = px + qy$; $qa - bp = 1$ haben die Geraden $ux + vy = 1$ oder $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h$ der Ebene die invariante „Dichte“ $du \, dv = dh \cdot d\varphi : h^3$. Ist K ein konvexer Bereich der Ebene, der den Ursprung enthält, so findet sich als Maß der Geraden, die K nicht treffen:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}.$$

Es wird die Abhängigkeit dieses Integrals von der Lage des Ursprungs untersucht und insbesondere das Minimum von I bestimmt und mit anderen Affininvarianten durch Ungleichungen in Verbindung gebracht. Dabei ergeben sich neue Extrem-eigenschaften der Ellipse.

Blaschke (Hamburg).

Fejes Tóth, László: Extremum properties of the regular polyhedra. Canadian J. Math. **2**, 22—31 (1950).

Hat ein konvexes Polyeder Π f Flächen, k Kanten und e Ecken und besitzt die Inkugel (eine größte Kugel in Π) bzw. Umkugel (die kleinste Kugel, in der Π enthalten ist) den Halbmesser r bzw. R , so genügt der Rauminhalt V des Polyeders Π den Ungleichungen:

$$V \geq \frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1 \right) r^3;$$

$$V \leq \frac{2k}{3} \cos \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k} \right) R^3.$$

Das Gleichheitszeichen besteht hier nur bei regulären Polyedern. — Hat jede Fläche von Π p Seiten und gehen von jeder Ecke q Kanten aus, so ist $R/r \geq \operatorname{tg} \pi/p \operatorname{tg} \pi/q$. Für den Flächeninhalt F des Polyeders Π besteht die Ungleichung

$$k \sin \frac{2\pi}{p} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{q} - 1 \right) r^2 \leq F \leq k \sin \frac{2\pi}{p} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{q} \right) R^2$$

und es gilt

$$\frac{F^3}{V^2} \geq 9k \sin \frac{2\pi}{p} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{q} - 1 \right).$$

Gyula Sz.-Nagy (Szeged).

Pogorelov, A. V.: Ein allgemeiner Satz für unendliche konvexe Vielfache. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 167—169 (1948) [Russisch].

Im n -dimensionalen euklidischen Raum R_n wird ein System von Vektoren u_1, \dots, u_k ($k \geq n$) konvex genannt, wenn sich kein Vektor u_i als Linearkombination der übrigen Vektoren u_j ($j \neq i$) so darstellen läßt, daß sämtliche Koeffizienten der Linearkombination positiv sind. Verf. betrachtet eine Funktion $\omega(Q)$, die auf den $(n-1)$ -dimensionalen Polyedern $Q \subset R_n$ definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt: 1. es gilt $\omega(Q_1) = \omega(Q_2)$, wenn Q_1, Q_2 kongruent und parallel orientiert sind; 2. aus $Q_1 \subset Q_2$ ($Q_1 \neq Q_2$) folgt $\omega(Q_1) < \omega(Q_2)$; 3. wenn das $(n-1)$ -dimensionale Volumen von Q gegen 0 oder ∞ konvergiert, gilt das auch von $\omega(Q)$. Verf. beweist den Satz: Es gibt ein und nur ein (nicht beschränktes) konvexes Vielfach Π mit den Eigenschaften: 1. auf den endlichen Seitenflächen Q_i ($i = 1, \dots, k$) von Π ist $\omega(Q_i) = p_i > 0$ vorgegeben; 2. diese Seiten haben die Richtungen der Einheitsvektoren u_1, \dots, u_k , die ein beliebiges konvexes System bilden; 3. die Normalen l_j der unendlichen Seitenflächen sind auch vorgegeben in der Form

$$l_j = \mu_{j1} u_1 + \dots + \mu_{jk} u_k \quad (\mu_{ji} > 0).$$

Die Existenz von Π ergibt sich durch eine einfache Kontinuitätsbetrachtung; der Beweis der Unizität ist schwieriger. Fary (Paris).

Angewandte Geometrie:

● **Nihammer, Th.:** Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. Basel: Verlag Birkhäuser 1950. geb. Fr. 32.—.

Levallois, Jean-Jacques: Sur le calcul des grands triangles géodésiques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 717—718 (1950).

Die angegebenen Formeln kommen für geodätische Dreiecke auf dem Rotationsellipsoid in Betracht, bei denen die Dreiecksseiten nicht wie beim Legendreschen Satz und anderen Potenzreihenentwicklungen als klein von 1. Ordnung gegenüber dem mittleren Erdradius angesehen werden können. Verf. geht von der Clairautschen Gleichung der geodätischen Linie aus und ordnet unter Einführung der reduzierten Breite den aus je einer Dreiecksseite und dem Pol gebildeten sphäroidischen Pol-dreiecken sphärische Dreiecke zu, wobei zwischen entsprechenden Stücken der sphäroidischen und der sphärischen Dreiecke die aus der Besselschen Lösung der ersten

geodätischen Hauptaufgabe bekannten Beziehungen bestehen. Er findet dem sphärischen Sinussatz und Cosinussatz analoge Näherungsformeln, die durch sukzessive Approximation die Berechnung des Dreiecks ermöglichen, und zwar mit einer Genauigkeit von 1/100 der Zentesimalsekunde bei Dreiecksseiten von 2000 km Länge bzw. von einigen Zehnteln der Zentesimalsekunde bei Seitenlängen von 4000—5000 km. Im letzteren Fall können die genannten Formeln als erste Annäherung verwendet werden, mit deren Hilfe dann eine strenge Berechnung aus den Poldreiecken möglich ist.

W. Hofmann (Bonn).

Topologie:

Alexandroff, P. S.: Über die Dimension der abgeschlossenen Mengen. *Uspechi mat. Nauk* 4, Nr. 6 (34), 17—88 (1949) [Russisch].

Aus der Einleitung: „Diese Arbeit ist eine Darstellung der Grundtatsachen der Homologietheorie der Dimension der Kompakten, die in Euklidischen Räumen beliebiger Dimensionszahl liegen. Diese Theorie, die ich in den Jahren 1930—31 aufgebaut habe, wurde zuerst in meiner Abhandlung „Dimensionstheorie, ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen“, *Math. Ann.*, Berlin 106, 161—238 (1932) (dies. Zbl. 4, 73) dargestellt. Die vorliegende Arbeit ist eine Überarbeitung der genannten Abhandlung, mit dem Ziel, die Darstellung im besonderen auch denjenigen, die sich nur auf die topologische Lehrbuchliteratur stützen, möglichst gut zugänglich zu machen. Demgemäß war es notwendig, die Mittel der Darstellung (besonders die Bezeichnungen) in Übereinstimmung zu bringen mit denen, die heute bei uns allgemein gebräuchlich sind und zuweilen ziemlich stark von denen abweichen, die ich vor 20 Jahren verwendet habe. Außerdem sind einige neuere Begriffe und Ergebnisse aufgenommen worden. So werden z. B. neben den Zyklen nach variablem Modul (die durch die neuen, feineren Untersuchungen von M. F. Bokštejn [*Fundam. Math.*, Warszawa 34, 311—315 (1947); dies. Zbl. 32, 123] und besonders von V. Boltjanskij [*Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 67, 597—601, 773—777 (1949)] gerechtfertigt sind) auch wahre konvergente Zyklen nach dem Koeffizientenbereich \mathfrak{R}_1 (der additiven Gruppe der mod 1 reduzierten rationalen Zahlen) betrachtet, und es wird u. a. der Satz von Mazurkiewicz über die dimensionellen Komponenten bewiesen. In dessen ist es mir nicht gelungen, die Beweise, die ich in der zitierten Arbeit gegeben habe, irgendwie wesentlich zu vereinfachen“. (Zbl.-Zitate von Ref. hinzugefügt.)

Pannwitz.

Dolcher, Mario: Questioni di minimo per insiemi chiusi sconnettenti uno spazio topologico. *Rend. Sem. Mat. Univ., Padova* 19, 159—161 (1950).

Die Teilmenge T des allgemein-topologischen Raumes E „zerschneidet“ E , wenn $E - T$ nicht zusammenhängend ist: sie „trennt“ zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 in E , wenn diese Punkte verschiedenen Komponenten von $E - T$ angehören. T zerschneidet oder trennt minimal, wenn keine Teilmenge von T die betreffende Eigenschaft hat. Für abgeschlossene Mengen F ergibt sich als hinreichende Bedingung: F zerschneidet E minimal, wenn die Begrenzung jeder Komponente von $E - F$ gleich F ist; F trennt p_1 und p_2 minimal in E , wenn die Begrenzung jeder der beiden Komponenten, welche p_1 bzw. p_2 enthalten, gleich F ist. In lokal zusammenhängenden Räumen sind diese Bedingungen auch notwendig; außerdem lassen sich in solchen Räumen zu jeder abgeschlossenen trennenden Menge F auch abgeschlossene minimal trennende Teilmengen angeben, z. B.: F trenne p_1 und p_2 und K_1 sei die p_1 enthaltende Komponente von $E - F$. Man bildet die Menge A_1 aller Punkte p derart, daß die Begrenzung von K_1 die Punkte p_1 und p_2 trennt. Dann hat die Begrenzung von A_1 die verlangte Minimaleigenschaft.

Aumann.

• Cartan, H.: Séminaire de Topologie algébrique, 1948/1949. Paris: Université de Paris; Faculté des Sciences, Calcul Différentiel et Calcul Intégral. 130 p., dactylogopie.

Es handelt sich um die Protokolle eines Seminars über die Homologietheorie der Komplexe und allgemeiner lokal-kompakter Räume. Die zugrunde liegenden algebraischen Konstruktionen werden in möglichstster Allgemeinheit systematisch dargestellt. Jedoch ist die Darstellung wohl kaum für Anfänger gedacht. Sie setzt vielmehr zum Verständnis ihrer Bedeutung eine gewisse Vertrautheit mit der kombinatorischen und allgemeinen Topologie voraus. Im Kap. I wird ein abstrakter Simplicialkomplex ähnlich definiert wie ein Eckpunktbereich bei Alexandroff-Hopf, *Topologie*, S. 155, und seine Realisierung durch euklidische Simplicialkomplexe untersucht. In Kap. II werden die Homologiegruppen eines abstrakten Komplexes einer-

seits unter Verwendung von geordneten Simplexen [vgl. Eilenberg, Ann. Math., Princeton, II. S. 45, 407—447 (1944)], andererseits unter Verwendung von orientierten Simplexen erklärt. Der übergeordnete algebraische Begriff ist der einer „groupe gradué à dérivation“, d. h. einer abelschen Gruppe, in der erstens ein Endomorphismus d mit $dd = 0$ und zweitens für jede ganze Zahl n ein „projecteur“ Θ_n (d. h. ein Endomorphismus mit $\Theta_n \Theta_n = \Theta_n$) gegeben ist mit $\Theta_n \Theta_m = 0$ für $n \neq m$ und $d\Theta_n = \Theta_{n-r}d$, wo r eine von n unabhängige ganze Zahl ist. Diesen groups gradués à dérivation G ist der Rest des Kap. II gewidmet, insbesondere den abgeleiteten Gruppen $H(G)$ und $H(G \bmod F)$, die der Bildung der Homologiegruppen und relativen Homologiegruppen entsprechen, wobei F eine Untergruppe von G ist. Kap. III bringt die bekannten Struktursätze über abelsche Gruppen mit endlichem Erzeugendensystem. In Kap. IV wird die Kokettengruppe (über dem Koeffizientenbereich Y) eines Komplexes als die additive Gruppe der Homomorphismen der Kettengruppe in Y eingeführt, die Beziehungen zwischen Homologie- und Kohomologietheorie untersucht ebenso wie die multiplikative Struktur des Kohomologieringes, die sich bekanntlich bei Verwendung geordneter Simplexe besonders einfach gestaltet. Kap. V bringt die singuläre Homologie- und Kohomologietheorie ebenfalls unter Verwendung geordneter Simplexe im Anschluß an Eilenberg (l. c.). Im Kap. VI wird die von Spanier (nachsteh. Referat) eingeführte, auf eine Idee von Alexander [Proc. nat. Acad. Sci. USA 21, 509, 511 (1935); dies. Zbl. 12, 230, 231] zurückgehende Kohomologietheorie für einen lokal-kompakten Raum dargestellt. Sie ist für kompakte Räume mit der Čechschen identisch und wird daher als Kohomologietheorie von Čech-Alexander bezeichnet. Kap. VII—IX sind den Homotopieoperatoren (d. s. Endomorphismen h einer groupe gradué à dérivation, zu denen es einen Endomorphismus k mit $\Theta_{n-r}k = k\Theta_n$ und $e - h = dk + kd$ gibt, wo e der identische Automorphismus ist) und ihren Anwendungen gewidmet; u. a. Isomorphie der „geordneten“ und „orientierten“ Homologie- und Kohomologietheorie eines Komplexes, Isomorphie der simplizialen und singulären Homologie- und Kohomologietheorie eines lokal-endlichen Komplexes, Isomorphie der simplizialen Homologiegruppen des endlichen Komplexes K mod dem Unterkomplex L mit den mittels unendlicher Zyklen definierten Homologiegruppen einer Simplizialzerlegung des lokal-endlichen Polyeders $K - L$, ebenso der Kohomologiegruppen von K mod L mit den mittels endlicher Kozyklen einer Simplizialzerlegung von $K - L$ definierten Kohomologiegruppen. In Kap. X ist die Theorie der lokalen Koeffizienten nach Steenrod [Ann. Math., Princeton, II. S. 44, 610 (1943)] dargestellt. Das Kap. XI behandelt das später benötigte tensorielle Produkt zweier Moduln über einem Ring (vgl. Bourbaki, dies. Zbl. 30, 220) und insbesondere zweier Moduln „gradués à dérivation“. Im Kap. XII wird der von Leray [C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1366 (1946); vgl. auch J. Math. pur. appl. 24, 95 (1945)] stammende Begriff des Bündels eingeführt: Ein Bündel A über einem lokal-kompakten Raum E besteht aus einer Gesamtheit von abelschen Gruppen A_X , wo der Index X alle nichtleeren abgeschlossenen Mengen $X \subset E$ durchläuft, wobei für $X \subset Y \subset E$ jeweils ein Homomorphismus f_{YX} von A_Y in A_X gegeben ist, der transitiv ist, derart daß A_X der direkte Limes der Gruppen A_Y ist, die zu den (abgeschlossenen) Umgebungen Y von X gehören. Die ganzen restlichen Kapitel XIII—XVII sind der Theorie dieser Bündel und ihren zahlreichen Anwendungen gewidmet. Zunächst wird der Träger eines Elementes $\alpha \in A_X$ erklärt als die Gesamtheit der Punkte $x \in X$, so daß $f_{xX}(\alpha) \neq 0$ ist. Besonders einfach sind diejenigen Bündel (carapace genannt), in denen jedes Element $\neq 0$ einen nichtleeren Träger hat und in denen die Homomorphismen f_{YX} für jedes Paar $X \subset Y$ Homomorphismen auf A_X sind. Eine carapace ist offenbar bereits völlig bestimmt durch die Gruppe A_E und die Träger aller Elemente $\alpha \in A_E$. Es ist nämlich dann A_X die Faktorgruppe von A_E nach der Untergruppe derjenigen Elemente, deren Träger zu X punktfremd sind. So erhält man z. B. eine carapace A , indem man für A_E die Gruppe der singulären Ketten eines lokal-kompakten Raumes E mit ihren gewöhnlichen Trägern wählt. Hier ist A eine groupe gradué à dérivation und man kann daher in üblicher Weise daraus das „singuläre Homologiebündel“ $H(A)$ von E ableiten. Ähnlich erhält man ein singuläres Kohomologiebündel, indem man den Träger einer singulären Kokette folgendermaßen definiert: ein Punkt x gehört dann und nur dann nicht zum Träger der Kokette f , wenn f den Wert Null annimmt auf allen singulären Simplexen, deren Träger in einer gewissen Umgebung von x enthalten sind. Man hat dann als A_E die Faktorgruppe aller Koketten nach denen mit leerem Träger zu nehmen. $H(A_E)$ bleibt dabei die singuläre Kohomologiegruppe von E . Ganz analog erhält man das Kohomologiebündel von Čech-Alexander sowie das Kohomologiebündel der Differentialformen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit u. a. Besonders interessant sind nun Sätze, die die lokalen Verhältnisse bei einem Bündel (also die Gruppen A_x für die Punkte $x \in E$) mit dem Verhalten im Großen verknüpfen. Hierzu gehören die Hauptsätze der Theorie (Kap. XVI), die hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß ein Homomorphismus eines Bündels A gradué à dérivation in ein Bündel A' gradué à dérivation über demselben Raum E , welcher für die abgeleiteten Bündel lokal (d. h. für alle Punkte $x \in E$) einen Isomorphismus von $H(A_x)$ auf $H(A'_x)$ bewirkt, auch im Großen einen Isomorphismus des abgeleiteten Bündels $H(A)$ auf $H(A')$ induziert. Die Brauchbarkeit dieser Sätze beruht darauf, daß man die lokale Isomorphie zweier Bündel oft leicht nachweisen kann. So wird u. a. gezeigt: Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist das singuläre Homologiebündel

isomorph mit dem singulären Homologiebündel, das mittels der differenzierbaren singulären Ketten definiert ist (vgl. hierzu auch Eilenberg, dies. Zbl. 29, 419); auf einer orientierbaren differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist das Kohomologiebündel der Differentialformen mit dem singulären Kohomologiebündel mit reellen Koeffizienten isomorph (Satz von De Rham); für einen lokal-kompakten Raum, der in allen Dimensionen im Homologiesinn lokal-zusammenhängend ist, ist das singuläre Kohomologiebündel mit dem Čech-Alexanderschen Kohomologiebündel isomorph; für eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit E gilt der Poincarésche Dualitätssatz für die singulären Homologie- bzw. Kohomologiegruppen ohne Voraussetzung über die Triangulierbarkeit von E . Im letzten Kapitel XVII wird überhaupt als Anwendung die Homologie- und Kohomologietheorie (einschließlich der Schnitttheorie) von Mannigfaltigkeiten ohne Triangulierbarkeitsbedingungen behandelt [vgl. hierzu auch H. Cartan, Comment. math. helvetici 18, 1 (1945/46)].

Burger (Frankfurt/M.).

Spanier, Edwin H.: Cohomology theory for general spaces. Ann. Math., Princeton, II. S. 49, 407—427 (1948).

Im Anschluß an J. W. Alexander [Proc. nat. Acad. Sci. USA 21, 511—512 (1935); dies. Zbl. 12, 231] werden Cohomologiegruppen (auch relative) eines Raumes X definiert auf Grund von Funktionen $f(x_0, \dots, x_n)$, $x_i \in X$, mit Werten im Koeffizientenbereich G , welche Funktionen im Gegensatz zu Alexander nicht als schief-symmetrisch vorausgesetzt werden. Es wird gezeigt, daß diese Cohomologiegruppen die Axiome von S. Eilenberg und N. E. Steenrod [Axiomatic approach to homology theory, Proc. nat. Acad. Sci. USA 31, 117—120 (1945)] sowie ein „Stetigkeitsaxiom“ erfüllen, woraus auf Grund eines unveröffentlichten Eindeutigkeitsatzes von Eilenberg und Steenrod folgt, daß die Theorie für kompakte Räume mit der Čechschen zusammenfällt. Für lokal endliche Komplexe gibt sie die kombinatorischen Cohomologiegruppen, berechnet auf Grund unendlicher Ketten. In einem Anhang wird ein zweiter Aufbau derselben Theorie angegeben und das Cup-Produkt eingeführt.

Specker (Zürich).

Whitehead, J. H. C.: Note on suspension. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) 1, 9—22 (1950).

L'A. donne une généralisation des théorèmes classiques de Freudenthal sur l'Einhängungshomomorphismus. Soit X un complexe, Y le complexe obtenu par adjonction à X de k n -cellules E_λ^n , dont les bords sont appliqués dans X par des applications $\psi: \dot{E}_\lambda^n \rightarrow X$. On peut alors former un polyèdre A constitué par k n -cellules E_λ^n dont les bords \dot{E}_λ^n sont reliés par des segments $p_\lambda p_0$ à un point fixe p_0 ; soit B la réunion $\dot{E}_\lambda^n \cup p_\lambda p_0$. Il existe une application canonique (homéomorphisme sur l'intérieur des E_λ^n) g de (A, B) dans (Y, X) ; soit g_τ l'homomorphisme induit par $g: \Pi_\tau(A, B) \rightarrow \Pi_\tau(Y, X)$. Alors, si $\Pi_s(X) = 0$ pour $s = 1, 2, \dots, j$, $j < n-1$, pour $r < n+j-2$, g_τ est un isomorphisme sur et g_{n+j-1} est un homomorphisme sur. Ce théorème permet parfois le calcul de $\Pi_m(Y)$ à partir de $\Pi_m(X)$. Un cas est particulièrement intéressant: supposons, avec $k = 1$, que $\psi: \dot{E}_\lambda^n \rightarrow X$ soit inessentielle. Alors il existe des homomorphismes: $f: \Pi_m(S^n) \rightarrow \Pi_m(Y)$ et $i: \Pi_m(X) \rightarrow \Pi_m(Y)$. f et i sont des isomorphismes sur; $i \Pi_m(X) \cup f \Pi_m(S^n) = 0$ et on a l'isomorphisme $\Pi_m(Y) = i \Pi_m(X) + f \Pi_m(S^n)$ pourvu que $\Pi_s(X) = 0$ pour $s = 1, 2, \dots, m-n+1$. L'A. montre enfin, en ce cas, le rapport liant l'homomorphisme g et la „suspension“ \mathfrak{E} de Freudenthal. Si E^n, E_0^n sont les hémisphères „Nord“ et „Sud“ d'une sphère S^n d'équateur $\dot{E}^n = S^{n-1}$, on peut écrire: $\Pi_{r-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \Pi_r(E^n, S^{n-1}) \xrightarrow{i} \Pi_r(S^n, E_0^n) \xrightarrow{j} \Pi_r(S^n)$ où ∂ et j , à cause de la contractabilité de E^n et E_0^n sont des isomorphismes; on a alors $\mathfrak{E}: \Pi_{r-1}(S^{n-1}) \rightarrow \Pi_r(S^n) = j^{-1} i \partial^{-1}$; à l'aide de cette définition et dans l'hypothèse $\psi: \dot{E}_\lambda^n \simeq 0$, même sans faire d'hypothèses explicites sur $\Pi_s(X)$, g se ramène, à \mathfrak{E} .

Thom (Strasbourg).

Vaccaro, Michelangelo: Sulle matrici d'incidenza generali di un complesso topologico. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma, Ist. naz. alta Mat., V. S. 7, 368—372 (1948).

Etant donné un complexe topologique, on peut définir des matrices d'incidence généralisées de la façon suivante: soit k_1, k_2, \dots, k_r r dimensions de ce complexe, $\sigma_{\alpha_1}^{k_1}, \sigma_{\alpha_2}^{k_2}, \dots, \sigma_{\alpha_r}^{k_r}$ un ensemble de r cellules, $\sigma_{\alpha_i}^{k_i}$ étant de dimension k_i . A cet ensemble on attache le nombre $h_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{k_1 \dots k_r}$ égal à 1 ou 0, suivant que toutes les cellules $\sigma_{\alpha_i}^{k_i}$ sont (ou non) deux à deux dépendantes. Ainsi se trouve définie une matrice H à r dimensions. L'A. définit ensuite la subordination entre matrices (H' est subordonnée à H , si l'ensemble des dimensions de H' est contenu dans celui de H), ainsi que les matrices intersection et réunion d'un ensemble fini de matrices H . L'A. ne dit pas — ce qui justifierait ses constructions — si ses matrices généralisées lui permettent d'obtenir d'autres invariants que les traditionnels invariants d'homologie. *Thom.*

Kuratowski, Casimir: Sur l'application de la notion d'homotopie au problème du nombre algébrique des points invariants. *Fundam. Math.*, Warszawa **34**, 261—271 (1947).

Verf. beweist die Fixpunktformel für Teilkontinuen E der Ebene, die absolute Umgebungsretrakte sind: Ist f eine Abbildung von E in sich ohne Fixpunkte auf dem Rande F von E , so gilt für die algebraische Anzahl ν der Fixpunkte $\nu = 1 - \sigma$, wobei σ die Spur der in der ersten Homologiegruppe von E durch f induzierten linearen Abbildung ist. Die Anzahl ν ist — auch bei unendlich vielen Fixpunkten — eindeutig definiert als algebraische Anzahl der Nullstellen und Pole einer rationalen Funktion $r(x)$, für welche bei geeignetem $u(x)$ gilt $f(x) - x = e^{u(x)} r(x)$ für $x \in F$ [C. Kuratowski, Théorèmes sur l'homotopie ..., *Fundam. Math.*, Warszawa **33**, 332—333 (1945)]; die erste Homologiegruppe tritt auf als Faktorgruppe der Gruppe der Abbildungen von E in die Kreislinie modulo der Untergruppe der unwesentlichen Abbildungen (N. Bruschlinsky, dies. Zbl. **8**, 373). *Specker* (Zürich).

Ganea, Tudor: Sur les espaces de recouvrement des rétractes. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 1470—1472 (1949).

Es werden Überlagerungen und Fundamentalgruppen eines Raumes E und eines Retraktes A von E in ihrer gegenseitigen Beziehung untersucht. E wird dabei als separierbar, zusammenhängend und lokal zusammenhängend vorausgesetzt; für Überlagerungen und Fundamentalgruppen werden die Definitionen von C. Chevalley (Theory of Lie Groups I, Princeton 1946) zugrunde gelegt. *Specker.*

Leray, Jean: Une définition géométrique de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité. *Comment. math. Helvetici* **20**, 177—180 (1947).

Verf. führt kurz den Schnittring einer Mannigfaltigkeit ein. *Specker* (Zürich).

Wu, Wen-Tsün: Les i -carrés dans une variété grassmannienne. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **230**, 918—920 (1950).

Soit G_n^m la variété grassmannienne des m -éléments linéaires passant par l'origine d'un espace euclidien R^{n+m} à $n+m$ dimensions. L'anneau de cohomologie mod. 2 de G_n^m est engendré par les classes W^i (classes de Stiefel-Whitney de la structure fibrée associée); de plus, l'anneau ainsi engendré est libre, en ce sens que tout polynôme de degré $p < n$ par rapport aux W^i représente une classe non-nulle. On peut alors calculer les carrés de Steenrod des W^i — ce qui, d'après une formule de H. Cartan [C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 425—427 (1950) formule (5)] détermine ces carrés pour une classe quelconque. La formule (1) $\text{Sq}^r W^s = \sum_i C_s^i \cdot r_{i+t-1} W^{r-t} W^{s+t}$, $s \geq r > 0$,

C_p^q coefficient binomial réduit mod. 2, s'établit par récurrence, à l'aide d'un procédé de polarisation: on considère l'application canonique du produit $G_{n_1}^{m_1} \times G_{n_2}^{m_2}$ dans $G_{n_1+n_2}^{m_1+m_2}$, dont l'A. a déterminé le type d'homologie. Supposant $m_1 = 1$, $m_2 = m - 1$, la formule de H. Cartan permet de vérifier (1). La formule (1) vraie dans la grassmannienne, est vraie pour les classes de Stiefel-Whitney de toute structure fibrée sphérique dont le groupe de structure est le groupe orthogonal; l'A. donne de plus quelques propriétés particulières aux espaces fibrés de vecteurs tangents à une

variété en complément à sa précédente Note [C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 508—511 (1950)]. Ces résultats apportent une contribution considérable au problème de l'interdépendance des classes de Stiefel-Whitney; ils posent par ailleurs une question: les classes W^i étant définies sans aucune hypothèse sur le groupe de structure par la formule $Sq^i U = q^* W^i$ la formule (1) reste-t-elle valable? *Thom* (Strasbourg).

Reeb, Georges: Variétés feuilletées, feuilles voisines. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1613—1614 (1947).

L'A. en collaboration avec Ch. Ehresmann [C. r. Acad. Sci., Paris **218**, 955—957 (1944)] puis seul [C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 236—237 (1945)] a étudié les propriétés topologiques globales des variétés intégrales d'un champ E_q continuellement différentiable et complètement intégrable d'éléments de contact à q dimensions d'une variété continuellement différentiable V_n . Dans la présente note les variétés linéaires tangentes sont éliminées; les résultats sont généralisés dans le cadre de la topologie pure. V_n représente une variété de dimension n . Un atlas A de V_n est formé d'une famille de cartes (f_i, O_i) où O_i est un ouvert de V_n et f_i un homéomorphisme de O_i dans R_n . Si O_i et O_j ont une partie commune O_{ij} non vide, celle-ci est représentée sur les pages i et j de l'atlas; la correspondance entre deux points $x = (x^1, \dots, x^n)$ et $y = (y^1, \dots, y^n)$ représentant un même point de O_{ij} est définie par $y^r = h_{ij}^r(x^1, \dots, x^n)$, $r = 1, \dots, n$. L'atlas jouit de la propriété F si les fonctions h_{ij}^r pour $r = 1, \dots, n-p$ ne dépendent au voisinage d'un point que des variables x^1, \dots, x^{n-p} . Un élément est l'image réciproque par f_i d'une composante connexe de la trace sur $f_i(O_i)$ d'une variété plane $x^r = \text{const.}$, $r = 1, \dots, n-q$; cette notion transpose celle d'intégrale élémentaire et est utilisée de la même manière pour la définition d'une topologie T . Une feuille est une composante connexe de cette topologie comme auparavant une intégrale complète. Th. 1. Si V_n est compacte et si toutes les feuilles sont régulières ou localement partout denses, chaque feuille régulière contient une feuille compacte dans son adhérence. Th. 2. Si V_q est une feuille compacte à groupe de Poincaré $P(V_q)$ fini, toutes les feuilles rencontrant un certain voisinage de V_q sont compactes et ont un groupe de Poincaré fini, isomorphe à un sous-groupe de $P(V_q)$. Th. 3. Si en plus des hypothèses du Th. 2, V_n est compacte et $q = n-1$, toutes les feuilles sont compactes. Les résultats d'une note précédente [C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 847—849 (1946)] sont étendus en l'absence de structures linéaires tangentes. Les démonstrations ne sont pas données, toutefois deux lemmes sont formulés sur lesquels repose le Th. 1. *Chr. Pauc.*

Reeb, Georges: Stabilité des feuilles compactes à groupe de Poincaré fini. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 47—48 (1949).

Les résultats de la note précédente sont généralisés ainsi: V_n est une variété feuilletée pour la dimension q , U un ouvert de V_n simplement connexe. Sous des conditions de raccordement C_1, C_2, C_3 des cartes d'un atlas (f_i, O_i) d'un voisinage de U , il existe un ouvert saturé O rencontrant U dont toutes les feuilles sont compactes. En outre, si l'ouvert U vérifie l'hypothèse de ce théorème pour une certaine structure feuilletée \mathfrak{F} , il vérifie cette hypothèse pour toute structure feuilletée \mathfrak{F}' assez voisine de la structure \mathfrak{F} dans une topologie convenable des structures feuilletées sur U (Propriété de stabilité). *Chr. Pauc* (Le Cap).

Reeb, Georges: Sur les singularités d'une forme de Pfaff analytique complètement intégrable. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1201—1203 (1948).

C_n représente l'espace euclidien complexe à n dimensions, ω une forme de Pfaff admettant au voisinage de 0 un développement en série entière $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots$, où ω_p désigne une forme dans C_n dont les coefficients sont des polynômes de degré p par rapport aux coordonnées canoniques x_i , $i = 1, \dots, n$. Il est supposé que $n \geq 3$, $\omega_1 = x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n$, et que la forme ω est complètement intégrable. L'A. utilise l'application φ du produit topologique $S_{n-1} \times C_1$ où S_{n-1} désigne la

sphère des vecteurs unitaires réels de C_n , définie par $f(u, \varrho) = \varrho u$ où $u \in S_{n-1}$ et $\varrho \in C_1$, transforme ω dans la forme $\tilde{\omega}$ analytique, complètement intégrable, admettant dans $S_{n-1} \times C_1$ la sphère $\varrho = 0$ comme variété intégrale et peut ainsi appliquer le Th. 2 et son complément d'une note antérieure (voir plus haut). Une conséquence en est que l'équation $\omega = 0$ admet une intégrale première holomorphe Φ dont le développement en série entière au voisinage de l'origine commence par $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Dans le cas réel, la partie quadratique sera une forme quadratique non dégénérée de signature quelconque. *Chr. Pauc (Le Cap).*

Lu, Chien-Ke: Classification of 2-manifolds with singular points. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 1093—1098 (1949).

Les variétés à deux dimensions avec points singuliers ne sont autres ici que les pseudo-variétés; l'A. montre qu'elles s'obtiennent à partir d'un nombre fini de surfaces par identification de points, et en détermine complètement la classification à l'aide de leurs singularités. Les théorèmes classiques sur l'addition des complexes donnent facilement pour ces pseudovariétés les groupes d'homologie ainsi que le groupe fondamental. *Thom (Strasbourg).*

Seifert, Herbert and William Threlfall: Old and new results on knots. *Canadian J. Math.* **2**, 1—15 (1950).

Kurze Einführung in die neueren Methoden der Knotentheorie: Fundamentalgruppe des Knotenaußenraumes, Homologiegruppen und Verschlingungsinvarianten der Überlagerungsräume des Knotenaußenraumes, Schlingknoten (vgl. Seifert, dies. Zbl. **33**, 137), Zerlegung eines Knotens in Primknoten (Schubert, dies. Zbl. **31**, 286). *Pannwitz (Berlin).*

Pereira Coelho, R.: On the groups of certain linkages. *Portugaliae Math.* **6**, 57—65 (1947).

Verf. beweist: Es seien F eine abgeschlossene Menge im euklidischen R^3 und C_i ($i = 1, \dots, n$) einfach geschlossene, in F enthaltene Polygone, die je ein singularitätenfreies, simpliziales Element E_i in R^3 beranden. Für jedes i sei jede geschlossene Kurve in $E_i - F$, die in $R^3 - F$ homotop null ist, auch in $E_i - F$ homotop null. Dann ist jede geschlossene Kurve L in $R^3 - (F \cup E_1 \cup \dots \cup E_n)$, die in $R^3 - F$ homotop null ist, auch in $R^3 - (F \cup F_1 \cup \dots \cup F_n)$ homotop null; dabei bezeichnet F_i irgendeine in E_i enthaltene, abgeschlossene Menge derart, daß $F_i - C_i$ für kein $k > i$ innere Punkte von E_k enthält. Für $n = 1$ und $F_1 = E_1$ ergibt sich der Satz leicht durch elementare Abänderungen eines von L berandeten Elements, für $n > 1$ durch Induktion nach n . — Dieser Satz kann bei der Berechnung der Fundamentalgruppe des Außenraumes von Systemen verketteter, aber unverketteter Polygone von Nutzen sein. Er wird auf geschlossene Ketten von Kreisen, wie sie z. B. bei der Konstruktion der Antoinischen Menge auftreten, angewendet. (Die Formulierung des — hier nicht wiedergegebenen — Lemmas 2 ist nicht ganz korrekt; beim Beweis wird vorausgesetzt, daß die Schnittpunkte der Projektionen von C und C_k auf beiden Projektionen in derselben Reihenfolge aufeinander folgen. Die Anwendung auf die Antoinischen Ketten wird davon nicht betroffen.)

Pannwitz (Berlin).

Klassische theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Murnaghan, F. D.: The foundations of the theory of elasticity. *Proc. Symposia appl. Math.*, Nr. **1**, (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua.) 158—174 (1949).

Ausgehend von einer Tensordarstellung des Formänderungsmechanismus gibt Verf. eine allgemeine Formulierung der Gleichgewichtsbedingung und der virtuellen Arbeit für den deformierten Körper. Mit Bezug auf den Spannungszustand des allseitigen Druckes wird hieraus eine Beziehung für den Zusammenhang zwischen

Druck und Volumen hergeleitet, jedoch nicht ohne gewisse experimentelle Befunde in die theoretische Überlegung aufzunehmen, welche sich nicht deduktiv herleiten lassen. Die gewonnene Endformel steht insbesondere im Einklang mit Kompressibilitätsversuchen bis zu dem hohen Druck von 100 000 kg/cm², welche von Bridgman im Jahre 1945 durchgeführt wurden. *H. Neuber* (Dresden).

Donder, Th. De et F. H. van den Dungen: Sur les principes variationnels des milieux continus. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 841—846 (1949).

Es sei

$$L = \frac{1}{2} \varrho \left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t} \right)^2 \right] - W + F_1 u^1 + F_2 u^2 + F_3 u^3;$$

hierbei sind die $u^\alpha(x, y, z, t)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) die Komponenten der Verrückung eines Punktes (x, y, z) in einem kontinuierlich mit Masse erfüllten Bereich (Rand S) zur Zeit t , ϱ die Dichte, F_α die Komponenten der Einheitskraft im Punkte (x, y, z) und W das innere Potential, das nach Voraussetzung eine Funktion des Deformationstensors ist. Verf. untersucht die erste Variation des Integrals $I = \int L dx dy dz dt$, erstreckt über ein von der Hyperfläche $\Phi(x, y, z, t) = 0$ begrenztes vierdimensionales Raum-Zeit-Gebiet, und diskutiert die Gleichungen, die sich aus dem Verschwinden von δI ergeben. Insbesondere interessiert der Fall, in dem die Verrückungen auf S und zu Beginn und Ende der Bewegung gegeben sind. — Werden die Deformationen „klein“ angenommen, so befindet man sich im Falle des Hookesschen Gesetzes.

Maruhn (Dresden).

Swainger, K. H.: Non-coaxiality of principal normal stresses and the „strain“ ellipsoid in the classical theory of infinitesimal deformation. Nature, London 165, 159—160 (1950).

Die klassische Theorie infinitesimaler Deformationen isotroper Körper lehrt bekanntlich, daß eine Spannungsfläche

$$\left(\frac{dR_0}{dR} \right)^2 = 1 - 2\varepsilon_{11} r_1^2 - 2\varepsilon_{12} r_1 r_2 - 2\varepsilon_{22} r_2^2$$

(r_ν = Richtungskosinus, R, R_0 = Radienvektoren vom Ursprung zum bewegten Punkt zu den Zeiten t und t_0 ; Beschränkung auf zwei Dimensionen) nur dann auf eine die Hauptspannungen $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ allein enthaltende Form gebracht werden kann, wenn die Koordinatenachsen in die Hauptdruckrichtungen fallen. Verf. sieht darin eine Hypothese und zeigt, daß sie i. a. nicht zuzutreffen braucht: die Spannungsellipse ist definiert durch die Gradienten einer räumlichen Verschiebung u , die eine auf die Rotation des Körpers als Ganzes bezügliche Komponente auch dann enthält, wenn diese Rotation bloß infinitesimal ist. Während also üblicherweise angenommen wird, daß die Hauptrichtungen von Spannungen und Drucken (strain and stress) physikalisch zusammenfallen, wird hier gezeigt, daß rein mathematisch gesehen Koaxialität i. a. nicht besteht.

Hardtwig (München).

Ghosh, S.: On the torsion and flexure of a beam whose cross-section is a quadrant of a given area. Bull. Calcutta math. Soc. 40, 107—115 (1948).

Die vom Verf. in zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. 30, 276, 31, 84) entwickelte Methode zur Lösung des Problems der Biegung und Verdrehung eines Balkens wird in dieser Note auf den Fall erweitert, daß der Querschnitt R einen Quadranten eines Querschnitts R_1 bildet, der in bezug auf zwei zueinander senkrecht stehende Achsen symmetrisch ist und mittels einer Funktion von einfacher Form auf den Einheitskreis abgebildet werden kann. Die Lösung des Biegungs-Verdrehungs-Problems beruht, wie Verf. bemerkt, auf der Ermittlung einer Funktion komplexen Arguments, die im Gebiet R analytisch ist und deren Imaginärteil am Rande von R vorgeschriebene Werte annimmt. Diese Funktion, wenn analytisch fortgesetzt in die drei übrigen Quadranten von R_1 mit Hilfe des Spiegelungsprinzips von Schwarz,

stellt sich als mehrdeutig im Gebiet R_1 heraus mit einem Verzweigungspunkt im Schnittpunkt der beiden Symmetrieachsen. Der Teil der Funktion, der mehrdeutig ist, kann aus dem Wert des imaginären Teils der Funktion am Rande von R_1 ermittelt werden. Der übrigbleibende Teil der Funktion ergibt sich danach durch konforme Abbildung von R_1 auf den Einheitskreis und durch Anwendung der Formel von Schwarz für eine analytische Funktion innerhalb eines Kreises, deren Imaginärteil am Kreisumfang gewisse vorgeschriebene Werte annimmt. *Gran Olsson.*

Conway, H. D.: Bending of rectangular plates subjected to a uniformly distributed lateral load and to tensile or compressive forces in the plane of the plate. *J. Appl. Mech.*, New York **16**, 301—309 (1949).

Die Arbeit gibt ein Verfahren zur Ermittlung der Durchbiegung und der Spannungen in einfach gestützten Rechteckplatten, die gleichzeitig einer konstanten Querbelastrung q und einer gleichmäßigen Zug- oder Druckspannung in der Plattenebene ausgesetzt sind. Zur Vereinfachung wird der Spannungszustand als unabhängig von der Ausbiegung angenommen, eine Annahme, die für kleine Ausbiegungen natürlich zulässig ist. Die Airysche Spannungsfunktion Φ genügt dann einfach der Gleichung: $\Delta\Delta\Phi = 0$ statt $\Delta\Delta\Phi = E[(w_{xy})^2 - w_{xx}w_{yy}]$. (Δ = Laplacescher Operator, w = Durchbiegung, E = Elastizitätsmodul), während die Durchbiegung der Gleichung: $\Delta\Delta w - h(\Phi_{yy}w_{xx} - 2\Phi_{xy}w_{xy} + \Phi_{xx}w_{yy}) = q$ (D und h Steifigkeit bzw. Dicke der Platte) gehorchen muß. — Wie Verf. angibt, sind diese Aufgaben von Bedeutung für die Berechnung der Platten im Schiffbau, weshalb Kurven angegeben sind, die das Auffinden von Größtwerten der Durchbiegung und Spannung gestatten. Beispiele sind gegeben, um die Benutzung der Kurven zu erläutern. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, wie die Berechnung auf den Belastungsfall hydrostatischen Druckes erweitert werden kann. *Gran Olsson (Trondheim).*

Tolotti, Carlo: Sulla statica delle superficie inestendibili ed elasticamente flessibili. *Giorn. mat. Battaglini*, IV. S. **78**, 128—150 (1949).

Mit der Bezeichnung „superficie elasticamente flessibili“ spielt Verf. auf das Auftreten von Biegungs- und Torsionsmomenten bei Flächenbiegungen an, wie sie an dünnen elastischen Platten proportional zur Krümmung nach einem von Bernoulli und Euler gegebenen Gesetz auftreten. Die Differentialgleichungen der Theorie derartiger Flächen zerfallen in zwei Gruppen, deren erste durch die Gleichungen von Gauß und Codazzi — bekannt aus der gewöhnlichen Differentialgeometrie — gegeben sind. Die zweite Gruppe besteht aus den drei Differentialgleichungen von Beltrami (welche die Statik unausdehnbarer vollkommen verbiegbaren Flächen beherrschen), die vierte berücksichtigt das Abweichen der Fläche vom Typus einer vollkommen verbiegbaren Fläche. — In der vorliegenden Abhandlung gewinnt Verf. zunächst die Gleichgewichtsbedingungen seines Problems in Form eines Variationsproblems. Die so gewonnenen Variationsgleichungen werden sodann auf eine spezielle Klasse von Verrückungen angewendet, bei welcher die Flächennormalen einer gewissen Korrespondenz unterliegen. Dabei kommt Verf. auf die Gesetze der Statik elastischer dünner Platten zurück bei speziellen Bedingungen hinsichtlich der Art der Deformation und des Randes. Abschließend behandelt Verf. ausführlich die Randbedingungen, welche man den gewonnenen Differentialbedingungen hinzuzufügen hat, um deren unbestimmten Charakter aufzuheben. *M. Pinl (Dacca).*

Sengupta, H. M.: On the bending of an elastic plate. I. *Bull. Calcutta math. Soc.* **41**, 163—172 (1949).

Durch die Transformation $x + yi = c \operatorname{Coj} \{\xi + \eta i\}$ werden elliptische Koordinaten eingeführt. $\xi = \alpha > 0$ bedeutet den Rand $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, wenn $a = c \operatorname{Coj} \alpha$ und $b = c \operatorname{Sin} \alpha$. Im Punkte x_1, y_1 greift die Last W an. Der Abstand

von der Last ist $r = \sqrt{\{x - x_1\}^2 + \{y - y_1\}^2}$. Querverschiebung

$$w = -\frac{W}{8\pi D} r^2 \left\{ \ln r - \frac{1}{2} \right\} + A'_0 + A_0 \operatorname{Coj} 2\xi + \{A'_1 \operatorname{Coj} \xi + A_1 \operatorname{Coj} 3\xi\} \cos \eta \\ + \{B'_1 \operatorname{Sin} \xi + B_1 \operatorname{Sin} 3\xi\} \sin \eta \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{[A_{n-2} \operatorname{Coj} (n-2)\xi + A'_n \operatorname{Coj} n\xi + A_n \operatorname{Coj} (n+2)\xi] \cos n\eta \\ + [B_{n-2} \operatorname{Sin} (n-2)\xi + B'_n \operatorname{Sin} n\xi + B_n \operatorname{Sin} (n+2)\xi] \sin n\eta\}.$$

Das partikuläre Integral wird in die Reihe

$$-\frac{c^2 W}{32\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \{P_n(\xi) \cos n\eta + Q_n(\xi) \sin n\eta\}$$

entwickelt. A'_n , A_n , B'_n und B_n werden aus den Randbedingungen $w = 0$ und $\partial w / \partial \xi = 0$ bestimmt. Die Reihe $A'_0 + \dots$ konvergiert absolut und ist biharmonisch. Anm. d. Ref.: Auf S. 165 muß in der Formel für $M_n^{(2)}$ der Zähler 1 durch 2 ersetzt werden. In Gl. (11) fehlt vor $L_2^{(2)}$ der Faktor 2. In Gl. (13) muß $\operatorname{Coj} 4\alpha$ durch $\operatorname{Coj} 2\alpha$ ersetzt werden. In Gl. (16) muß $n-1$ durch $n+1$ und $\operatorname{Sin} n\alpha$ durch $\operatorname{Sin} (n+2)\alpha$ ersetzt werden. In Gl. (19) muß 4α durch 2α ersetzt werden. In Gl. (21) fehlt hinter $\{5M_4^{(3)} + \dots\}$ der Faktor $\exp(2\alpha)$. *Konrad Ludwig.*

Hopkins, H. G.: Elastic deformations of infinite strips. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 164—181 (1950).

Diese Arbeit enthält Lösungen einiger Probleme des ebenen Spannungszustandes mit kleinen Formänderungen in der Querrichtung in unendlich langen, isotropen Rechteckscheiben, die nur an den Rändern beansprucht sind. Die Spannungsfunktion von Airy sowie die Querverschiebungen genügen der biharmonischen Gleichung $\Delta \Delta F = 0$ (und einer analogen Gleichung für die Querverschiebung) und das grundlegende mathematische Problem besteht in der Lösung dieser Gleichung für verschiedene Randbedingungen. Verf. bemerkt mit Recht, daß bisher denjenigen Elastizitätsproblemen nur wenig Beachtung geschenkt wurde, bei denen einige der Grenzbedingungen unmittelbar von den Verschiebungen abhängen. Die Arbeit enthält unter Benutzung Fourierscher Integrale die Lösung der Aufgabe, wenn eine lange Kante unverschieblich ist, während die Spannungen oder Verschiebungen an der anderen Kante beliebig vorgeschrieben sind mit verschwindenden Spannungen und Formänderungen im Unendlichen. Der Fall einer Einzellast am Rande wird im einzelnen diskutiert, und numerische Werte der Spannungen am unverschieblichen Rande sind angegeben.

Gran Olsson (Trondheim).

Bachšijan, F. A.: Endliche Verrückungen in einer Vollkugel, die innerem Druck unterworfen ist. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 137—140 (1948) [Russisch].

Eine volle Kugelschale vom Innenradius a und Außenradius b befindet sich im Gleichgewicht unter dem Innendruck p . Ist $v(r)$ der Abstand eines Punktes mit dem ursprünglichen Abstand r nach der Deformation, so wird zur Lösung der Gleichung des Kräftegleichgewichtes $v d\sigma_r + 2dv(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$ im inneren plastischen Bereiche $a \leq r \leq \varrho$ nach A. A. Il'jušin [Gewisse Probleme der plastischen Verformung. Priklad. Mat. Mech. **7**, 245—272 (1943)] angesetzt: $\sigma_r = k\theta - \frac{2}{3}\sigma_s$, $\sigma_r - \sigma_\theta = -\sigma_s$ mit $\theta = v^2 r^{-2} v'(r) - 1$, während im äußeren elastischen Bereiche trotz der Zulassung endlicher Verzerrungen das Hookesche Gesetz gültig sein soll. Die entstehenden gewöhnlichen Differentialgleichungen werden elementar gelöst. — Bestimmt werden insbesondere die Grenzwerte des Innendruckes, bei denen entweder noch keine oder gerade volle Plastizierung des Materials eintritt. — Besonders einfach wird die Lösung für inkompressibles Material und im Grenzfalle $b - a \ll a$; die entsprechenden Formeln werden mitgeteilt.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Mandel, Jean: Sur la réactivité des sols. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 176—178 (1950).

Ein Boden sei mit Wasser von Druck q gesättigt, seine Verformungen werden als elastisch angesehen. Für die Raumänderung in der Zeiteinheit gelte das Gesetz von Darcy. Diese vier Gleichungen ermöglichen die Bestimmung der elastischen Verschiebungen und von q unter geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen. Die Lösung wird für Senkungsprobleme von Erdmassen und für zeitlich veränderliche Belastungen angewendet, wobei sich die von L. Boltzmann angegebene Formel für Nachwirkungserscheinungen ergibt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Hydrodynamik:

Davydov, B.: Variationsprinzip und kanonische Gleichungen für eine ideale Flüssigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 165—168 (1949) [Russisch].

Verf. untersucht die erste Variation des Integrals über den Lagrangeschen Ausdruck $L = \frac{1}{2} \rho v_k^2 - \varepsilon(\varrho)$ mit $\varepsilon'(\varrho) = \int dp_\varrho$ ($k = 1, 2, 3$; Summationssymbol) unter den Nebenbedingungen $\dot{\varrho} + (\varrho v_k)_k = 0$ (Kontinuitätsgleichung) und $\dot{\alpha} + \alpha_k v_k = 0$ (α eine Lagrangesche Koordinate) und unter der Voraussetzung, daß α zu Anfang und Ende der betrachteten Bewegung festliegt. Unter Verwendung von Lagrangeschen Multiplikatoren werden bei Variation von α , λ und v_k die Eulerschen Gleichungen aufgestellt, aus denen man die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen erhalten kann. Entsprechend werden auch die kanonischen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Ausdruck hergeleitet. Dies gestattet auch, zur Schrödingerschen Gleichung einer gequantelten Flüssigkeit zu gelangen, wenn nur die kanonischen Koordinaten in geeigneter Weise durch Operatoren ersetzt werden.

Maruhn (Dresden).

Smythe, W. R.: On the flow of a perfect fluid between two plates from a circular inlet channel. J. appl. Phys., Lancaster, Pa., **20**, 224 (1949).

Das Geschwindigkeitspotential einer reibungslosen inkompressiblen Strömung zwischen zwei parallelen Platten vom Abstand h , deren eine ein kreisrundes Loch vom Radius r_0 enthält, durch welches die Strömung abfließen kann, wurde von E. T. Benedikt [J. appl. Physics, Lancaster, Pa. **19**, 1092 (1948)] in Form einer Integraldarstellung angegeben. Der Verf. weist im vorliegenden Brief an den Herausgeber darauf hin, daß es u. U. bequemer ist, dieses Problem mit Hilfe von Reihenentwicklungen zu behandeln.

Riegels (Göttingen).

Pekeris, C. L.: Stability of the laminar parabolic flow of a viscous fluid between parallel fixed walls. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **74**, 191—199 (1948).

Nachdem die Tollmiensche Stabilitätstheorie für die Grenzschicht experimentell durch Schubauer und Skramstad bestätigt wurde, haben Lin [Quart. Appl. Math. **3**, 288 (1946)] und Meksyn [Proc. R. Soc., London A **186**, 391 (1946)] sich erneut mit der Theorie der Stabilität einer Strömung zwischen ebenen Wänden (mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung) befaßt und auch für diesen Fall kritische Re-Zahlen gefunden. Mit diesen Ergebnissen stimmt der Verf., der sich neben vielen anderen bereits früher (Zbl. f. Mech. **4**, 270 und **7**, 273) mit diesem Problem befaßte, nicht überein. Er entwickelt daher neuerdings asymptotische Ausdrücke für die (komplexen) charakteristischen Werte C der zweidimensionalen Störungen im Grenzfall kleiner Wellenzahlen α und großer Werte αR (R = Reynoldszahl). Die möglichen Störungen der parabolischen Strömung zerfallen nach der Theorie des Verf. in 2 Klassen: in der einen geht bei $\alpha^2 = 0$ der Realteil $C_r \rightarrow 0$, wenn $\alpha R \rightarrow \infty$, in der anderen $C_r \rightarrow 1$, wenn $\alpha R \rightarrow \infty$. Die Störungen der letzteren Klasse sind immer stabil, während gewisse Störungen der ersten Klasse für $\alpha^2 R > 10000$ instabil werden können.

Riegels (Göttingen).

Casal, Pierre: Mouvement permanent d'un fluide visqueux entre deux disques en rotation. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 178—179 (1950).

Für die laminare Bewegung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei Scheiben von unendlichem Durchmesser und derselben Achse, von denen die eine fest ist und die andere sich gleichförmig dreht (Couettescher Fall), können die Navier-Stokesschen Gleichungen auf zwei Differentialgleichungen zurückgeführt werden, deren Lösung in Form von Funktionsreihen angegeben wird, für welche Rekursionsformeln angegeben werden und deren Konvergenz untersucht wird. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Lewis, J. A. and G. F. Carrier: Some remarks on the flat plate boundary layer. Quart. appl. Math. **7**, 228—234 (1949).

Die Blasiusche Grenzschichtlösung für die ebene Platte ist in der unmittelbaren Umgebung der Plattenvorderkante nicht mehr gültig. Carrier und Lin (s. dies. Zbl. **29**, 427) behandelten dieses Problem kürzlich, indem sie für die Vorderkante eine Lösung vom Stokesschen Typ ansetzten und diese dann näherungsweise numerisch an die Blasius-Lösung anpaßten. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Übergangsgebiet durch eine theoretische Lösung vom Oseenschen Typ verbessert. Da diese Lösung aber auf einen Geschwindigkeitsgradienten $0,555/\sqrt{x}$ (statt $0,332/\sqrt{x}$ bei der Blasius-Lösung) führt, betrachten die Verff. in einem weiteren Abschnitt eine modifizierte Oseensche Lösung, indem sie statt der Anströmgeschwindigkeit U_0 ein gewogenes Mittel der horizontalen Geschwindigkeitskomponente einführen ($U^* = c U_0$, $0 < c < 1$). Die zu behandelnde Differentialgleichung für die Stromfunktion erhält damit die Form $\Delta(\Delta - c \cdot \partial/\partial x)\psi = 0$ (Δ = Laplace-scher Operator; für die Oseensche, nicht modifizierte Form ist $c = 1$). Die Größe von c wird bei der Lösung zunächst offen gelassen und schließlich so gewählt, daß sich gute Übereinstimmung ergibt. *Riegels* (Göttingen).

Maurer, Eduard: Die kritische Reynoldssche Zahl für Kreisrohre nach dem Entropieprinzip. Z. Phys. **126**, 522—532 (1949).

Verf. gibt eine einfache Ableitung für die von Meißner und Schubert (s. dies. Zbl. **32**, 225) aufgestellte These, daß der Umschlag der laminaren in die turbulente Strömungsform beim Rohr dadurch bedingt sei, daß oberhalb der kritischen Reynoldszahl die Entropie der turbulenten Strömung, oberhalb der kritischen Reynoldszahl die Entropie der laminaren Strömung größer ist. *Riegels* (Göttingen).

Batchelor, G. K.: Energy decay and self-preserving correlation functions in isotropic turbulence. Quart. appl. Math. **6**, 97—116 (1948).

Die Arbeit ist im Zusammenhang mit und z. T. vor den schon besprochenen Arbeiten des Verf. (s. dies. Zbl. **32**, 226 und **30**, 377) entstanden. Verf. stellt fest, daß die Eigenschaft der Korrelationsfunktion, ihren Verlauf während des Abklingens der Turbulenz bis auf affine Verzerrung nicht zu ändern, wesentlich nur bei kleinen Reynoldszahlen möglich ist. Für große Zeiten ($t \rightarrow \infty$) wird dafür das Abklinggesetz $\overline{u'^2} \sim t^{-5/2}$ aufgestellt entsprechend einer Korrelationsfunktion $f(r, t) = e^{-r^2/8\nu t}$. Weiter enthält die Arbeit theoretische Ansätze für kleine Abklingzeiten bei kleinen und großen Reynoldszahlen, wobei die Eigenschaft der Ähnlichkeit nur noch für kleine Werte r der Korrelationsfunktion besteht. *Riegels* (Göttingen).

Heisenberg, W.: On the theory of statistical and isotropic turbulence. Proc. R. Soc., London, A **195**, 402—406 (1948).

Der zeitliche Abfall des Spektrums freier isotroper Turbulenz wird diskutiert. Die vom Verf. [Z. Physik **124**, 628—657 (1948)] gegebenen Gleichungen für die Spektralverteilung werden als Funktion der Zeit durch den Ansatz gelöst, daß die Fourier-Amplitude $F(k, t)$ die Form $f(k\sqrt{t})/\sqrt{t}$ haben solle. $f(x)$ verhält sich für kleine x wie x , für große x wie $x^{-5,3}$. Eine Interpolationsfunktion wird angegeben. *C. F. v. Weizsäcker*.

Liepmann, H. W.: Die Anwendung eines Satzes über die Nullstellen stochastischer Funktionen auf Turbulenzmessungen. *Helvetica phys. Acta* **22**, 119—126 (1949).

In einem Satz von S. O. Rice [Bell System Techn. J. **23**, 82 (1944) und **24**, 46 (1945)] wird die Frage nach der Zahl der Nullstellen N_0 einer stochastischen Funktion $J(t)$ (t = Zeit) untersucht. Es sei $\overline{J(t)} = 0$ (Überstreichen deutet zeitliche Mittelung an). Unter gewissen Voraussetzungen ist dann $N_0^2 = \overline{J'^2}/(\pi^2 \overline{J^2})$. Diesen einfachen Satz, der die Zahl der Nullstellen mit dem mittleren Quadrat der Ableitung der Funktion in Verbindung bringt, benutzt der Verf. neben anderen Methoden, um für isotrope Turbulenz die zeitliche Ableitung des mittleren Geschwindigkeitsquadrats der turbulenten Schwankung $(du_1/dt)^2$ experimentell zu ermitteln. Für die Messungen verwendet er eine Hitzdrahtanordnung, zählt mit einer besonderen Zählvorrichtung die Nullstellen des Verstärkerstromes, differenziert diesen mittels einer ähnlichen Kapazitäts-Widerstands-Anordnung, wie sie Townsend [Proc. Cambridge Philos. Soc. **43**, 560 (1947)] benutzte, und stellt außerdem die Spektralverteilung des Verstärkerstromes fest. Der Vergleich aller dieser Meßmethoden gab keine wesentlichen Abweichungen der einen oder anderen Methode, wenn auch die Genauigkeit in der Bestimmung von $\lambda^2 = u_1^2/\overline{u_1'^2}$ nur in der Gegend von etwa 10% lag. Riegels (Göttingen).

Taub, A. H.: On Hamilton's principle for perfect compressible fluids. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1 (Brown Univ. 2.—4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua), 148—157 (1949).

Verf. zeigt die Äquivalenz des als Hamiltonsches Prinzip bezeichneten Variationsproblems mit den Bewegungsgleichungen einer reibungslosen kompressiblen Flüssigkeit. Diese werde während der untersuchten Bewegung teilweise von starren bewegten Wänden begrenzt: innerhalb der Flüssigkeit befinde sich eine Diskontinuitätsfläche der Beschleunigung. Im Gegensatz zu entsprechenden Betrachtungen von Lichtenstein (Grundlagen der Hydrodynamik, Berlin 1929, S. 361 ff.) werden hier auch Variationen der Temperaturverteilung und der Diskontinuitätsfläche zugelassen. Hierbei muß dafür gesorgt werden, daß die Erhaltung der Energie in der gesamten Flüssigkeitsmasse gesichert ist. Um dies durchzuführen, wird der Lagrangesche Ausdruck in geeigneter Weise verallgemeinert. Maruhn (Dresden).

Imai, Isao: Application of the W. K. B. method to the flow of a compressible fluid. I. J. Math. Phys., Massachusetts **28**, 173—182 (1949).

Verf. verwandelt zunächst die Differentialgleichungen

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

einer zweidimensionalen, wirbelfreien, nichtzähen, kompressiblen Strömung nach der Hodographenmethode in die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + K \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2} = 0$ für die Stromfunktion Θ , diskutiert sodann die Konvergenzverhältnisse des Lösungsansatzes $\Psi = \sum_n T_n(t) (A_n \cos n \Theta + B_n \sin n \Theta)$ mit Hilfe der Wentzel-Kramers-

Brillouin-Methode, bekannt aus der Quantenmechanik [vgl. G. Wentzel, Z. Phys. **38**, 518—529 (1926); L. Brillouin, C. r. Acad. Sci., Paris **182**, 374—376 (1926); H. A. Kramers, Z. Phys. **39**, 828—840 (1926); A. Zwaan, Dissertation Utrecht 1929, Arch. Néerland. **12**, 1—76, insbes. 33 (1933)] und transformiert auf neue Variable τ, φ, ψ , welche auch von St. Bergmann in die Theorie eingeführt worden waren. Auf diese Weise erhält die Grundgleichung der Strömung die Form $\Delta \psi = k \psi$. Für Strömungen mit mäßiger Geschwindigkeit ist K näherungsweise konstant und k daher sehr klein. An der Oberfläche eines Hindernisses ist $\Psi = 0$ und daher auch $\psi = 0$. In der Nähe des Hindernisses ist daher $k \psi$ sehr klein. In großer Entfernung

vom Hindernis ist ψ sehr groß, doch wird $\Delta\psi$ von höherer Ordnung unendlich als ψ , und daher kann $k\psi$ sicher vernachlässigt werden im Vergleich mit $\Delta\psi$. Eine Näherungslösung ist daher immer durch die allgemeine Lösung $\psi = \frac{1}{2i} [f(\sigma) - \bar{f}(\bar{\sigma})]$, $\sigma = \tau + i\theta$ der Laplaceschen Gleichung $\Delta\psi = 0$ gegeben [mit $f(\sigma)$ als willkürlicher analytischer Funktion der komplexen Variablen σ]. Genau wie in der HODOGRAPHENMETHODE von KÁRMÁN und TSİEN gelingt es auch hier Verf., eine Beziehung zwischen dem Profil $\Psi = 0$ in der z -Ebene und in der ζ -Ebene [der inkompressiblen Strömung, gegeben durch $f(\sigma)$] aufzustellen. Weiterhin werden Geschwindigkeitsverteilung und Druck längs eines Hindernisses im Falle einer stationären Strömung berechnet. Insbesondere werden noch dünne Profile, der adiabatische Fall und der Fall von Überschallströmungen behandelt. M. Pinl (Dacca).

Carrier, G. F.: On the stability of the supersonic flows past a wedge. Quart. appl. math. 6, 367—378 (1949).

Bekanntlich hat eine gleichförmige Überschallparallelströmung beim Auftreffen auf einen symmetrisch zur Strömungsrichtung liegenden Keil unendlicher Länge und nicht zu großen Öffnungswinkeln theoretisch zwei Möglichkeiten, den anliegenden Verdichtungsstoß auszubilden. Der dem Keil mehr anliegende „schwache“ Stoß ist dabei der im Experiment gewöhnlich beobachtete, doch soll unter geeigneten Vorsichtsmaßregeln auch der „starke“ Stoß (von A. KANTROWITZ) experimentell erzeugt worden sein. — Verf. behandelt die Frage, was mittels der Theorie der idealen Flüssigkeiten in Hinsicht auf die Stabilität beider Strömungsausbildungen ausgesagt werden kann, wenn die Strömung hinter der Stoßfront (bei ungeänderten Anströmbedingungen) kleinen zeitlich veränderlichen Störungen unterworfen wird. Zunächst werden die diesen Vorgang beschreibenden Differentialgleichungen mit den Methoden der Störungsrechnung linearisiert. Dann wird das Zusammenspiel von kleinen ebenen Störungen und ebenen Stoßwellen untersucht. Schließlich wird ein Beweis für die Tatsache skizziert, daß bei beiden Stoßformen keine exponentiell von der Zeit abhängigen und in der Keilspitze nichtsingulären Lösungen des Randwertproblems der linearisierten Störungsgleichungen existieren. Es gibt demnach keine den Ansatzpunkt der Stoßfront in der Keilspitze festlassenden Eigenschwingungen des Strömungsvorganges hinter der Stoßfront. — Für die in der Einleitung der Arbeit formulierte Aussage, daß beide Stöße stabil seien, reicht — wie Verf. in einer nachträglichen Fußnote am Schlusse selbst bemerkt — der Beweis nicht hin. Hierzu müßte das Stoßverhalten bei beliebigen Störungen noch untersucht werden. Vgl. hierzu auch die Arbeit von H. Richter [Z. angew. Math. Mech. 28, 341—345 (1948)].

H. Behrbohm (Waldkirch i. Br.).

Eterman, I. I.: Distribution of pressure over the surface of a body of revolution in a gas flow of high subsonic velocity. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 363—370 u. engl. Zusammenfassg. 370 (1947) [Russisch].

Christianović hat 1940 ein Näherungsverfahren für die Berechnung einer Unterschallströmung um Rotationskörper angegeben, bei dem die Grundgleichungen der Gasbewegung auf charakteristische Koordinaten umgeformt werden. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode ergänzt durch ein Verfahren, bei dem die umströmte Körperform in der Ebene der charakteristischen Koordinaten angenähert bestimmt wird. Das Verfahren wird insbesondere auf das Rotationsellipsoid angewandt und kann näherungsweise auch auf ellipsoidähnliche Körper ausgedehnt werden. Ferner wird ein Verfahren gezeigt, um die Gleichungen von Christianović zu integrieren, wobei als Ausgangspunkt die inkompressible Strömung um den Rotationskörper dient. In einem Iterationsprozeß werden dann die gesuchten Funktionen in jeder Iterationsstufe durch Legendresche und Fouriersche Reihen dargestellt. Für ein Rotationsellipsoid mit dem Achsenverhältnis 0,215 und für eine Machsche Zahl der Anströmung von $M_\infty = 0,827$ wird ein Zahlenbeispiel berechnet.

Wuest (Göttingen).

Schrenk, Oskar: Angenäherte Berechnung der gegenseitigen Beeinflussung zwischen Flügel und Rumpf im Überschallbereich. Z. angew. Math. Phys., Basel 1, 202—209 (1950).

Pack, D. C.: On the formation of shock-waves in supersonic gas jets. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 1—17 (1948).

Die stationären Formen der Expansion eines parallel in ein ruhendes Mittel austretenden Überschallstrahles hängen von dem Verhältnis des Mündungsdruckes zum Außendruck p_m/p_a und der Mündungs-Machzahl w_m/a_m ab. Die Möglichkeit, Form und Ort sich bildender Verdichtungsstöße zu berechnen, wird am Modell der ebenen Strömung erprobt, wo die Geradlinigkeit eines Teiles der Charakteristiken wesentliche Erleichterung bringt. Für zwei Beispiele mit $c_p/c_v = 1,3$ und der Machzahl 1,5 wird das Strömungsfeld gerechnet, nämlich für die Druckverhältnisse $p_m/p_a = 2$ und 7,5. Die Stoßwellen beginnen mit verschwindender Amplitude dort, wo sich zum erstenmal Charakteristiken derselben Schar berühren. Von dort ab wird das Feld neu berechnet, indem nun die Brechung der Stromlinien an der Stoßwelle berücksichtigt wird. Da die Krümmung der Stoßwellen nur schwach war, so blieb die zugehörige Wirbelbildung in der Strömung im Hinblick auf das nur qualitative Ziel der Untersuchung außer Betracht. Die Stoßwelle wurde nur bis zum Treffpunkt mit dem Rand oder der Achse des Strahles verfolgt. Die errechneten Stoßwellenformen ähneln den gemessenen sehr, und für den Mindestdruck auf der Strahlachse ergibt sich eine Formel, deren Wert im Falle $p_m = 2p_a$ noch nahezu der Prandtlschen Regel (für $p_m \sim p_a$) $p_{min} = p_a^2/p_m$ entspricht. — Das Ergebnis läßt erwarten, daß eine entsprechende Rechnung für drehgleiche Strahlen die gemessenen Werte und Strahlbilder auch zahlenmäßig gut wiederzugeben vermöchte, vielleicht sogar zu einen Meßverfahren für p_m und w_m führen könnte.

Bödewadt (Brunoy).

Brinkley jr., Stuart R. and John G. Kirkwood: Theory of the propagation of shock waves. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 606—611 (1947).

Es werden eindimensionale Stoßwellen betrachtet, in Gasen oder in Wasser. Die Verf. schreiben die hydrodynamischen Gleichungen im wesentlichen in Lagrangescher Form, kombinieren sie mit den Bedingungen, die an der Stoßfront gelten, und erhalten so 3 Beziehungen zwischen den 4 partiellen Ableitungen des Druckes und der Strömungsgeschwindigkeit nach der Zeit und nach der Lagrangekoordinate. Für die Energie-Zeit-Kurve der Stoßwelle wird eine Ähnlichkeitsbedingung aufgestellt und plausibel gemacht. Eine Stoßwelle hinterläßt auf ihrem Weg in jedem Flüssigkeitselement einen Zuwachs an innerer Energie, der durch den Entropiezuwachs bestimmt ist, den die Stoßwelle verursacht. So bekommen die Verf. eine weitere Gleichung für die 4 Differentialquotienten. Sie leiten 2 gewöhnliche Differentialgleichungen ab für den Spitzendruck und die Energie der Stoßwelle in Abhängigkeit von der Entfernung von der Erregungsstelle des Stoßes. Für die numerische Integration der Grundgleichungen kann die exakte Hugoniotkurve der Flüssigkeit verwendet werden. Vergleich mit den Näherungsrechnungen von Kirkwood und Bethe (1941) und von Osborne und Taylor [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 70, 322 (1946)] zeigt Übereinstimmung, soweit diese Näherungen ihrem Ansatz nach reichen können.

Bechert (Mainz).

Taylor, Geoffrey: The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives. Proc. R. Soc., London, A 200, 235—247 (1950).

Ausgehend von den Grundgleichungen der normalen Detonation berechnet Verf. für zwei einfache Fälle den Vorgang der (adiabatischen) Expansion der Schwaden hinter der Detonationsfront: 1) Zündung zur Zeit $t = 0$ längs einer Ebene $x = 0$ (ebene Front); 2) Zündung im Punkte $r = 0$ (kugelförmige Front). In beiden Fällen läßt sich der Vorgang mittels einer einzigen Koordinate $z = x/t$ bzw. r/t

beschreiben und daher durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen lösen. Benötigt wird dazu außer den Detonationsdaten die Adiabatenbeziehung $p = p(\rho)$ der Schwaden, die a) für Gase in der Form $p = c \cdot \rho^\gamma$ angesetzt, b) für Trinitrotoluol von Jones und Miller [Proc. R. Soc. London A 194, 480 (1948)] übernommen wird. Für Fall 1a), 1b), 2b) werden Ergebnisse kurvenmäßig dargestellt. Für einige Detonationsdaten wird ein Vergleich mit experimentellen Werten an gasförmigen und festen Sprengstoffen durchgeführt. — Die Arbeit wurde 1941 als Geheimbericht verfaßt. Unabhängig davon hat W. Döring die Fälle 1a) (1941) und 2a) (1943) in Geheimberichten behandelt (nicht veröffentlicht). *Wecken.*

Wärmelehre:

● **Hund, Friedrich: Einführung in die theoretische Physik. IV.: Theorie der Wärme.** (Meyers kleine Handbücher Bd. 54—55.) Leipzig: Bibliographisches Institut VEB 1950. 330 S. DM 5,80.

Als vierter Band der fünfbändigen Einführung in die theoretische Physik liegt nunmehr die Theorie der Wärme vor. Der schon vielfach bewährten Darstellungskunst des Verf. ist es auch diesmal gelungen, ein umfangreiches Gebiet der theoretischen Physik auf 330 Oktavseiten einigermaßen erschöpfend darzustellen. Behandelt werden nach einem Einleitungskapitel die Gesetze der Wärmeübertragung, die beiden Hauptsätze der Thermodynamik nebst den üblichen Anwendungen, ferner die Grundlagen der statistischen Theorie der Wärme und recht ausführlich die Wärmestrahlung. Ein Anhang enthält einen historischen Überblick. Die Behandlung der einzelnen Probleme erfolgt zum Teil in durchaus eigenwilliger Weise. So werden der Entropiebegriff und seine wichtigsten Eigenschaften bereits im Abschnitt über den ersten Hauptsatz eingeführt, freilich für den Fall eines idealen Gases, wodurch allerdings bei manchen Lesern der Eindruck erweckt werden könnte, als ob der zweite Hauptsatz auf das engste mit dem ersten verknüpft sei und nicht eine völlig neue und neuartige Gesetzmäßigkeit darstellt. Bemerkenswert erscheint besonders die elegante Art, wie die statistische Betrachtungsweise begründet wird, einschließlich des ominösen Faktors $N!$ in der Zustandssumme bzw. Entropieformel für ein ideales Gas.

F. Sauter (Göttingen).

● **Schmidt, Ernst: Thermodynamics. Principles and applications to engineering.** Authorized translation from the third german edition by J. Kestin. Oxford: At the Clarendon Press 1949. XX, 532 p. 35 s. net.

Hier handelt es sich nicht nur um eine einfache Übersetzung der 3. deutschen Auflage, vielmehr hat Verf. den Inhalt durch Zusätze und Änderungen vielfach umgearbeitet. Bezüglich der Maßeinheiten hat Übersetzer den Grundsatz gewählt, das metrische System in allen grundlegenden Untersuchungen beizubehalten, die praktischen Anwendungen insbesondere auf dem Gebiet der Dampfmaschinen hingegen in den landesüblichen Einheiten zu behandeln. Erweitert worden sind vornehmlich die Abschnitte über Gasströmungen und über Turbinen, so daß sie dem gegenwärtigen Stande entsprechen. Neu aufgenommen ist ein Abschnitt über Rückstoß-Antriebe, die Raketen- wie Strahltriebwerke umfaßt; bei aller raumbedingten Kürze ist ihm durchweg anzumerken, daß dem Verf. dieses Gebiet seit langem vertraut ist. (Von Verfassern früherer Werke über Raketenantrieb wäre freilich außer E. Sänger unbedingt auch H. Oberth zu nennen, der immerhin den entscheidenden Anstoß zur heutigen Entwicklung gegeben hat.) Angenehm wirkt auch in der Übersetzung die saubere und gründliche Erörterung der mechanischen und thermischen Einheiten, die nun die britischen Einheiten mit umfaßt. Dabei wird erfreulicherweise in der Mechanik das System der 4 Einheiten (Länge, Zeit, Kraft, Masse) verwendet. Der Satz „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ muß dabei zwar abgeändert werden, aber dafür ist dann das (Norm-)Gewicht der

Masseneinheit zugleich die Kräfteinheit, und technisch unbequeme Einheiten wie dyn, slug usw. sind vermieden. (In der mechanischen Dimension der Gaskonstante bleibt allerdings der umständliche Faktor kg-Gewicht/kg-Masse, weil im spezifischen Volumen als Maß der Stoffmenge die Masse statt des Normgewichts benutzt wird.) Auch sonst sind die bekannten Vorzüge des Werkes erhalten geblieben. Man möchte eine entsprechende deutsche Ausgabe wünschen. *Bödewadt.*

Wiener, Norbert: Entropy and information. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 2, (Massachusetts Institute of Technology, July 29—31, 1948. Electromagnetic theory.) 89 (1950).

Meixner, Josef: Thermodynamik und Relaxationserscheinungen. Z. Naturforsch. **4a**, 594—600 (1949).

Verf. zeigt die thermodynamische (d. h.: nicht atomtheoretische) Behandlung von Einstellungsvorgängen chemischer Gleichgewichte mit Reaktionen beliebiger Ordnung. Die Änderungsgeschwindigkeit der Parameter (Reaktions-Laufzahlen), welche die jeweilige Zusammensetzung beschreiben, wird in der Nähe der Gleichgewichtszusammensetzung eine lineare Funktion der Abstände dieser Parameter von ihren Endwerten, und zwar mit einer Koeffizientenmatrix, die nur von den Zustandsgrößen T , V abhängt. Daher setzen sich diese jeweils übrigen Parameterabstände bei festen T , V aus Exponentialfunktionen zusammen, deren Abklingzeiten (Relaxationszeiten) reell und positiv sind. Die zugehörigen Hauptachsen (Basisreaktionen) hängen von den Festwerten T , V ab. Die gleiche Form stellt sich bei adiabatischen statt isothermer Reaktionen ein, und ebenso ist es, wenn man p statt V festhält. Verf. betrachtet dann noch erzwungene Zustandsschwingungen, z. B. die akustische Relaxation. *Bödewadt (Brunoy).*

Buchdahl, H. A.: On the principle of Carathéodory. Amer. J. Phys. **17**, 41—43 (1949).

Verf. beanstandet die häufige Vermengung physikalischer und mathematischer Überlegungen in den Darstellungen von Carathéodorys Beweis des zweiten Hauptsatzes. Er unterscheidet das physikalische „Prinzip von C.“, daß es in der Nachbarschaft jeden Zustandes adiabatisch unerreichbare Zustände gibt, von dem mathematischen „Satz von C.“, daß es nur dann bei jedem Punkt eines R_n Nachbarpunkte gibt, welche längs den Lösungen einer n -gliedrigen Pfaffschen Differentialgleichung unerreichbar sind, wenn diese integrabel ist. Hier legt er dar, wie man auf Grund des Prinzips von C., entsprechend der Einführung einer empirischen Temperatur und der inneren Energie eines Systems, zur Vermutung einer Funktion S kommen kann, welche die Übergangsmöglichkeiten zwischen zwei Zuständen kennzeichnet und deren Konstanz voraussichtlich mit dem Verschwinden des Pfaffschen Differentialausdruckes zusammenhängen wird, der sich für die bei quasistatischen adiabatischen Änderungen zugeführte Wärme aufstellen läßt.

Bödewadt (Brunoy).

Buchdahl, H. A.: On the theorem of Carathéodory. Amer. J. Phys. **17**, 44—46 (1949).

Hier gibt Verf. einen Beweis des „Satzes von C.“ — vgl. vorsteh. Referat — für den Fall von 3 unabhängigen Veränderlichen. Dabei führt er in $Pdx + Qdy + Rdz$ zunächst als neue Veränderliche das Integral des Anteiles $Pdx + Qdy$ ein, der sich auf die zwei ersten Veränderlichen bezieht. Der ganze Differentialausdruck enthält dann ein Differential weniger, so daß sich der Beweis vereinfacht. *Bödewadt.*

Buchdahl, H. A.: On the unrestricted theorem of Carathéodory and its application in the treatment of the second law of thermodynamics. Amer. J. Phys. **17**, 212—218 (1949).

Verf. überträgt hier seinen für $n = 3$ gegebenen Beweis des Satzes von Carathéodory (vgl. vorsteh. Referat) auf eine beliebige Zahl n von Veränderlichen. Anschließend wird dargelegt, wie sich durch Verbindung mit dem Prinzip von C.

die Definitionen der Entropie und der absoluten Temperatur sowie das Gesetz von der Nichtabnahme der Entropie ergeben. *Bödewadt (Brunoy).*

Crawford, F. H.: *Jacobian methods in thermodynamics.* Amer. J. Phys. 17, 1—5 (1949).

Umrechnungen der partiellen Ableitungen in der Thermodynamik sind oft mühsam. Daß sie sich grundsätzlich erleichtern lassen, indem man Funktional-determinanten benutzt, ist zwar schon erkannt worden; aber auch das war bisher nicht sehr übersichtlich. Verf. gibt hier ein einfaches und leicht zu merkendes System zur Handhabung dieses Verfahrens, womit seine Vorteile erst zur Geltung kommen. *Bödewadt (Brunoy).*

Garavaldi, Orestina: *Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 6, 461—466 (1949).

Beindet sich das in einem Gefäß eingeschlossene Mittel anfänglich auf der Temperatur Null und bleibt die Außenseite der überall gleichdicken homogenen Wand ständig auf dieser Temperatur, so wird nach dem Gesetz der Temperatursteigerung im Innern gefragt, wenn dort (bei homogen bleibender Innentemperatur) von $t = 0$ an nach bekanntem Gesetz Wärme entwickelt wird. Verf. stellt die Analogie mit einem elektrischen Kabel heraus, um Formeln der Vierpoltheorie zu übernehmen und so die Gleichung des Vorganges ohne Betrachtung des Temperaturverlaufes in der Wand zu erhalten. Aus der operatorenmäßig hingeschriebenen Lösungsformel wird die Lösung für den Fall gleichmäßiger Aufheizung nach dem Rezept der Reihenentwicklung gewonnen, woraus der allgemeine Fall seine Lösung durch zeichnerische oder zahlenmäßige Integration finden soll. *Bödewadt.*

Cattaneo, Carlo: *Sulla conduzione del calore.* Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 83—101 (1949).

Preso in esame la trasmissione unidimensionale del calore, detta \hat{u} la temperatura, q la densità di corrente termica, (q e u funzioni solo della coordinata x e del tempo) l'A., approfondendo considerazioni di Boltzmann fondate sulla teorie cinetica dei gas, dimostra che fra q e u passa la relazione:

$$(1) \quad \sigma \frac{\partial q}{\partial t} = -\chi q - \chi^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

dove χ è la conduttività del mezzo, σ un'altra costante, se questa ultima fosse nulla, la (1) si ridurrebbe all'ordinaria legge di Fourier. Partendo dalla (1) l'A. dimostra che l'equazione di propagazione del calore diventa iperbolica, e non parabolica come nel caso ordinario, sicchè si può avere anche per il calore una velocità finita di propagazione che risulta dell'ordine di grandezza delle velocità molecolari. Prova poi che l'espressione della temperatura ottenuta risolvendo la sua equazione con condizioni iniziali nulle all'esterno di un certo intervallo, coincide, per valori elevati del tempo, con l'espressione analoga ricavata dalla teoria ordinaria. Infine estende le sue considerazioni al caso tridimensionale. *Graffi (Bologna).*

Benfield, A. E.: *The temperature in an accreting medium with heat generation.* Quart. appl. Math. 7, 436—439 (1950).

L'A. immagina lo spazio $x > 0$ riempito da un fluido di calore specifico c , densità ρ , diffusività K , in moto con velocità costante v parallela all'asse x . Supposto che, per ogni unità di volume del fluido, si sviluppi, nell'unità di tempo, la quantità di calore costante A , determina la temperatura $T(x, t)$ in ogni punto e in ogni istante t , risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{A}{c\rho}$$

con le condizioni $T(x, 0) = T_0$, $T(0, t) = T$. In particolare prova $\partial T / \partial x$ tende, per $t \rightarrow \infty$ a $A / c\rho v$. *Graffi (Bologna).*

Casei, Corrado: Sulla distribuzione delle temperature in regime permanente di un anello in ambienti a temperature diversa. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 7, 219—224 (1950).

Un anello, immerso in due ambienti di temperatura diversa separati da un piano passante per il suo asse di simmetria, ha diametro piccolo rispetto al raggio di curvatura; la temperatura dei suoi punti θ dipende perciò sensibilmente solo dall'ascissa curvilinea del cerchio a cui si può assimilare l'anello. L'A. risolvendo l'equazione unidimensionale della trasmissione del calore, determina la distribuzione di θ , supposta stazionaria, e il suo sviluppo in serie di Fourier. *Graffi* (Bologna).

Geist, Dietrich und Ulrich Dehlinger: Wärmeleitung bei Phasenumwandlungen. Z. Naturforsch. 4a, 415—423 (1949).

Einsinnig fortschreitende Erstarrungs-, Polymerisationsvorgänge und ähnliche Phasenumwandlungen in wärmeleitenden Stoffen bedeuten das Auftreten von Wärmequellen (und damit einen Knick im Temperaturverlauf) an der Umwandlungsgrenze. Ihre Verschiebungsgeschwindigkeit ist im allgemeinen eine Temperaturfunktion. In dem Ansatz der Verff. für das unbegrenzte eindimensionale Problem ist neu und richtig, daß sie die Umwandlungstemperatur nicht der Gleichgewichtstemperatur gleichsetzen; Lage und Temperatur der Phasengrenze ergeben sich vielmehr bei der Lösung der Aufgabe, nachdem die Geschwindigkeit der Phasengrenze aus einer transzendenten Integralgleichung bestimmt worden ist. Die Sonderfälle konstanter oder linear temperaturabhängiger Geschwindigkeit werden eingehend mit Reihenentwicklungen, Näherungen und Grenzformeln behandelt. *Bödewadt*.

Drăganu, Mircea: Sur la correction relativiste dans quelques problèmes de diffusion. J. Phys. Radium, VIII. S. 10, 301—304 (1949).

Die Arbeit behandelt die Vorgänge bei der Diffusion unter dem Gesichtspunkte der speziellen Relativitätstheorie. Das Ziel der Arbeit ist die relativistische Erweiterung der Integro-Differentialgleichung der Diffusion von Halpern, Lueneburg und Clark. *Wüster* (Wuppertal).

Steinbuch, K.: Berechnung von Kolbentemperaturen. Ingenieur-Arch. 17, 353—362 (1949).

Die Erörterung der möglichen Genauigkeit in den eingehenden Zahlenwerten (Wärmefuhr, Übergangszahlen, Wandtemperaturen) führt zu starker Vereinfachung der Rechnung. Es wird nur die stationäre, mittlere Temperaturverteilung in drehgleichen Kolben untersucht, wobei im Kolbenboden der innere Wärmefluß nur radial, der Wärmeübergang nur axial zur Gehäuseluft, hingegen in der Ringzone wie in der Schaftzone des Kolbens der Wärmefluß nur axial und der Wärmeübergang nur radial zum Zylinder angenommen werden. Jedem der Kolbenteile wird eine mittlere Übergangszahl zugewiesen, jeder Stelle der Außenfläche ein Mittelwert der berührten Zylindertemperaturen. Ein Beispiel zeigt, daß sich die Rechnung durch annehmbare Parameter mit der Messung zum Einklang bringen läßt. *Bödewadt* (Brunoy).

Elektrodynamik:

Balseiro, José A.: Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen zwischen zwei exzentrischen Zylindern. Rev. Un. mat. Argentina 14, 118—124 (1950) [Spanisch].

The formal solution for electromagnetic waves propagating between two eccentric cylinders of infinite conductivity is given in terms of the propagation modes of the coaxial guide. A first approximation for the case of small eccentricities is discussed, and the propagation factor is obtained in terms of the eccentricity. *Autoreferat*.

Willenbrock, F. K. and S. P. Cooke: Interaction of a spiral electron beam and a resonant microwave cavity. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 114—125 (1950).

Die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld eines zylindrischen Hohlraumresonators, dem ein homogenes Magnetfeld achsial überlagert ist, mit Elektronen, die achsial eingeschossen werden, wird untersucht. Wenn der Hohlraumresonator zu linear polarisierten Schwingungen erregt ist, dann bewegt das beschleunigende elektromagnetische Feld die Elektronen in Schraubenlinien mit größer werdendem Radius und die Elektronen werden senkrecht zu den Ausgangsschwingungen orientierte Schwingungen erregen und Energie auf diese übertragen. In der Schwingungsebene des beschleunigenden Feldes bzw. in beiden Schwingungsebenen beim zirkular polarisierten Beschleunigungsfeld des Hohlraumresonators, erregt der Elektronenstrahl ein Feld, das in seiner Phase zum Beschleunigungsfeld entgegengesetzt ist analog zur gegenelektromotorischen Kraft eines elektromechanischen Generators. Auf eine Reihe von möglichen Anwendungen der Wechselwirkung zwischen den Schwingungen des Hohlraumresonators und den schraubenförmigen Elektronenbahnen wird hingewiesen. *W. Glaser (Wien).*

Fränzl, Kurt: Beziehungen zwischen Signal und Spektrum. *Rev. Un. mat. Argentina* **14**, 140—155 (1950) [Spanisch].

Für den Hauptteil eines weitgehend beliebigen Signals gegebener Dauer werden enge obere und untere Schranken angegeben, die nur von der Dauer und nicht vom Verlauf des Signals abhängen. Insbesondere wird berechnet, welcher Bruchteil der Gesamtenergie eines Signals gegebener Dauer höchstens auf Frequenzen ω innerhalb eines Bandes gegebener Breite $|\omega| \leq \Omega$ entfällt. Die Küpfmüllersche Regel über den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Einschwingzeit eines Filters wird in verallgemeinerter Form bewiesen. Ferner wird bewiesen, daß die Durchlaßkurve eines Filters mit monotonem Einschwingvorgang auch nicht angenähert rechteckig sein kann, sondern ungefähr Glockenform hat. Genauer kann man zeigen, daß bei einem Filter mit monotonem Einschwingvorgang die sämtlichen Ableitungen des Übertragungsmaßes nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben und daß ebenso die geraden Ableitungen der quadratischen Durchlaßkurve nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben. *Autoreferat.*

Terrall, John R.: On the motion of particles in a traveling wave linear accelerator. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S.* **77**, 415—416 (1950).

Die Bewegung einer Punktladung in einem linearen Wanderwellen-Beschleuniger wird so behandelt, daß die Bewegungsgleichung in einem mit der Phasengeschwindigkeit der Wanderwelle bewegten Inertialsystem integriert wird und die so bestimmte Energie mittels einer Lorentztransformation wieder auf das ursprüngliche System zurückgerechnet wird. Der Verlauf der Energie in Abhängigkeit von der Phasengeschwindigkeit wird diskutiert. Das Teilchen kann nur dann unbegrenzt Energie aufnehmen, wenn sich die beschleunigende Welle mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Weiter wird die Abhängigkeit der Energie von der im Feld durchlaufenen Strecke angegeben. *W. Glaser (Wien).*

Optik:

Grivet, Pierre: Sur l'extension de la formule de Lagrange-Helmholtz au domaine du troisième ordre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **230**, 1152—1154 (1950).

Die Abweichung von der Sinusbedingung, wie sie durch die Bildfehler dritter Ordnung, d. h. durch Öffnungsfehler und Koma bedingt ist, wird auf zwei verschiedene Arten hergeleitet. *W. Glaser (Wien).*

Platzek, Ricardo: Theorie der geometrischen Aberrationen der zentrierten optischen Systeme. *Rev. Un. mat. Argentina* **14**, 182—196 (1950) [Spanisch].

Two methods are developed in order to determine successively the geometrical aberrations of centered systems of an arbitrary number of optical surfaces of axial

symmetry, spherical or not. — The first method is based on the classical concept of the angular eiconal (characteristic function), which is deduced from the principle of Fermat. The second method uses for the determination of the aberrations of the system the matrix which transforms any given ray in the object space into a ray of the image space. This procedure is based on a method which has been given by R. A. Sampson in order to obtain the aberrations of third order. It is shown that it can be developed into a form which permits to determine by successive approximations the coefficients of arbitrarily high order. *Autoreferat.*

Hulst, H. C. van de: On the attenuation of plane waves by obstacles of arbitrary size and form. *Physica, The Hague* **15**, 740—746 (1949).

Verf. beweist, daß zwischen der Schwächung einer ebenen Welle durch ein Hindernis beliebiger Gestalt und Beschaffenheit und der komplexen Amplitude der nach vorne gestreuten Welle ein einfacher Zusammenhang besteht. Bezeichnet man mit A die mit dem Abstand multiplizierte komplexe Amplitude der Streuwelle (dieses Produkt ist vom Abstand unabhängig) für eine einfallende ebene Welle von der Amplitude 1, dann ist der Wirkungsquerschnitt gleich 2λ mal dem Imaginärteil von A . Die Beziehung gilt in dieser Form zunächst für longitudinale Wellen, kann jedoch ebenso auf jede einzelne lineare Komponente einer transversalen Welle angewandt werden. — Für sehr große Objekte ergibt sich mit Hilfe der Kirchhoffschen Beugungsformel, daß der Wirkungsquerschnitt gleich der zweifachen geometrischen Fläche des Hindernisses ist. — Der angegebene Satz erleichtert in manchen Fällen die Bestimmung von Wirkungsquerschnitten. *W. Franz (Münster).*

Wolf, E.: Diffraction associated with defocusing. *Nature, London* **164**, 924 (1949).

Lommel hat 1886 Formeln angegeben für die Beugung einer sphärischen Wellenfront an einer kreisförmigen Aperturblende. Im Anschluß hieran untersucht Verf. die Beugungsfigur, welche auf einer achsensenkrechten Ebene (welche nicht notwendig die Brennebene sein soll) erscheint. Der Bruchteil der Intensität, welche außerhalb eines gegebenen Kreises vom Radius r um die Achse fällt, wird berechnet. Die erhaltene Formel führt für die Brennebene auf den schon von Rayleigh 1881 angegebenen Ausdruck $J_0^2(v) + J_1^2(v)$; der außerhalb der geometrischen Schattengrenze fallende Bruchteil der Intensität ergibt sich zu $J_0(v) \cos v + J_1(v) \sin v$. v ist dabei die Abkürzung kRr/f , worin k die Wellenzahl, R der Radius der Aperturblende und f ihr Abstand vom Brennpunkt ist. — Eine eingehendere Darstellung soll an anderer Stelle erscheinen. *W. Franz (Münster).*

Pohlack, Hubert: Analytische und graphische Methoden zur Lösung optischer Interferenzprobleme bei dünnen Schichten. *Ann. Phys., VI. F.* **5**, 311—328 (1950).

Bei der Reflexionsminderung an optischen Gläsern, bei der Steigerung der Metallreflexion, der optischen Strahlenteilung und der verlustarmen Lichtfilterung, handelt es sich oft um Interferenzerscheinungen an bzw. in dünnen, durchsichtigen Schichten. Der Verf. leitet — um eine Methode zu geben und die hierbei vorliegenden Verhältnisse einigermaßen einfach übersehen und berechnen zu können — zunächst unter der Annahme senkrechten Einfalls linear polarisierten Lichtes die mathematischen Ausdrücke für die elektrische und magnetische Feldstärke in den einzelnen Schichten ab und zeigt, wie sich unter Verwendung von Matrizen die Berechnung des reflektierten sowie des durch die Schichten hindurchgehenden Lichtes in einfacher Weise durchführen läßt. An einigen einfachen Beispielen wird dies näher erläutert. Auch auf den Fall merklicher Absorption in den einzelnen Schichten werden die Untersuchungen ausgedehnt. Anschließend werden graphische Methoden für Näherungslösungen des Problems angegeben. Es wird diskutiert, wie sich die rechnerischen und graphischen Methoden in der praktischen Anwendung kombinieren lassen, um die erforderlichen Brechungsindizes der Schichten und die erforderliche Dicke dieser Schichten zu bestimmen, um für die oben angegebenen Zwecke — insbesondere für die Reflexminderung — geeignete Schichtsysteme zu ermitteln. *Picht (Potsdam).*

Brillouin, L.: The scattering cross section of spheres for electromagnetic waves. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. **20**, 1110—1125 (1949).

Es wird in dieser sehr lesenswerten Arbeit von neuem die Frage der Streuung elektromagnetischer Wellen an einer Kugel aufgeworfen. Die klassische Theorie dieser Erscheinung ist seit G. Mie wohl bekannt. Wendet man sie auf die Berechnung des Streuquerschnitts der Kugel an, der definitionsgemäß gleich dem Quotienten der totalen, von der Kugel zurückgeworfenen Energie und der Energiedichte der primären einfallenden Strahlung ist, so führt die Theorie jedenfalls bei Kugeln von großem Durchmesser auf das auffällige Resultat, daß der Streuquerschnitt doppelt so groß wird wie der Kugelquerschnitt. Nach den Methoden der geometrischen Optik sollte man aber in diesem Grenzfall erwarten, daß der Streuquerschnitt genau gleich dem Kugelquerschnitt ausfällt. — Verf. führt diese Unstimmigkeit darauf zurück, daß man bisher die Berechnung der totalen, von der Kugel zurückgeworfenen Energie nicht unter der richtigen physikalischen Vorstellung vorgenommen hat. Man muß nämlich dabei berücksichtigen, daß das sekundäre Feld nicht allein aus der zurückgeworfenen elektromagnetischen Strahlung besteht, sondern auch aus dem kompensierenden Feld im Gebiet des Schattens hinter der Kugel. Bei der Integration über die unendlich ferne Kugel zum Zweck der Berechnung der Streuungsenergie nach dem Poyntingschen Satz muß dann seiner Meinung nach der kleine körperliche Winkel, der dem Schattengebiet entspricht, ausgeschlossen bleiben. — Die Integrationen werden dadurch allerdings erheblich schwieriger. In der Arbeit wird jedoch gezeigt, wie sich diese Schwierigkeiten durch Benutzung geeigneter Näherungsausdrücke überwinden lassen. Die Anwendung der Rechnungen auf den Fall einer großen Kugel führt dann in der Tat zu dem zu erwartenden Streuungsquerschnitt in der Größe des Kugelquerschnitts. *H. Buchholz* (Seeheim).

Sobolev, V. V.: Über die diffuse Reflexion und Transmission des Lichtes durch eine ebene Schicht eines trüben Mediums. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **69**, 353—356 (1949) [Russisch].

Die diffuse Reflexion und Transmission des Lichtes durch eine ebene Schicht eines streuenden Mediums wird unter der Annahme einer beliebigen Winkelabhängigkeit der Streuung berechnet. Die Lösung der sich ergebenden linearen Integralgleichungen läßt sich numerisch durchführen. Der Spezialfall einer unendlich dicken Schicht wird genauer diskutiert. *A. Unsöld* (Kiel).

Persico, Enrico: Il dipolo come lente magnetica divergente. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. S. **7**, 191—195 (1950).

Es wird gezeigt, daß das Feld eines magnetischen Dipols auf Strahlen, welche in der Schnitthöhe die achsensenkrechte Mittelebene des Dipols treffen, wie eine Zerstreuungslinse mit der Brennweite $f = -(16/9\pi) \cdot a^5 (1 + a^{-4})$ wirkt. Die Brennweite der einzelnen Linsenzonen wächst somit mit der fünften Potenz von a . Es wird vorgeschlagen, in der Achse einer gewöhnlichen Magnetlinse einen derartigen kleinen Dipol anzubringen, um damit zwei benachbarte achsennahe Strahlen zu fokussieren. Da die Paraxialstrahlen auf diese Weise ausgeblendet werden, kommt die Anordnung zwar nicht für die Übermikroskopie, wohl aber für die β -Spektroskopie in Betracht. *W. Glaser* (Wien).

Ramberg, E. G.: Aberration correction with electron mirrors. *Proc. Symposia appl. Math.*, Nr. **2**, (Massachusetts Institute of Technology, July 29—31, 1948. *Electromagnetic theory.*) 86 (1950).

To be published in the *Journal of Applied Physics*.

Relativitätstheorie:

Bureau, Florent: La notion d'espace et la mécanique de l'électron. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **35**, 542—558 (1949).

Seit den bekannten Erfolgen der relativistischen Gravitationstheorie ist das Bestreben, immer weitere Gebiete der Physik auf geometrische Eigenschaften des raumzeitlichen Kontinuums zurückzuführen, nicht zur Ruhe gekommen. Verf. versucht, von gewissen „physikalischen“ Differentialgleichungen auszugehen, diese zu „Fundamentalgleichungen“ zu erennen (d. h. ihre Invarianz zu postulieren) und die Geometrie aus dem Koeffizientenmaterial solcher Fundamentalgleichungen aufzubauen. Als eine derartige Fundamentalgleichung wählt Verf. zunächst

$$F(u) \equiv a^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + a^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + a_0 u = 0$$

mit reellen Variablen $x^1, x^2, \dots, x^n = t$ und einfach hyperbolischem Charakter der Differentialgleichung hinsichtlich der Zeitvariablen t . Aus der nach Voraussetzung bestehenden Invarianz folgt der Tensorcharakter der $a^{\alpha\beta}$ und der skalare Charakter von a_0 . Wegen $|a^{\alpha\beta}| \neq 0$ (nach Voraussetzung) findet sich dann auch eine invariante Riemannsche Metrik $a_{\alpha\beta}$ mit allem Zubehör (Christoffelklammern, kovariante Differentiation usw.). An Stelle der Invarianz von $F(u)$ bzw. $(Fu) = 0$ empfiehlt es sich, auch die Invarianz von $F^*(u) = R F(u)$ zu fordern. Das führt zu einem weitreichenderen Ergebnis, nicht nur zur quadratischen Metrik $a_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, sondern auch zur linearen invarianten Differentialform $q_\alpha dx^\alpha$. Mit $\lambda = R^{-1}$ und $q_\alpha = \frac{2}{n-2} b_\alpha$ ist damit für $n \geq 3$ der Anschluß an die Weylsche Geometrie erreicht.

Weitere Möglichkeiten für geometrische Einkleidung physikalischer Differentialgleichungen bieten sich durch Verwendung von Gleichungen höherer, z. B. vierter Ordnung aus der Theorie der Doppelbrechung oder durch Übergang zu Systemen physikalischer Differentialgleichungen. Im zweiten Falle sind es insbesondere die Diracschen Differentialgleichungen für das Elektron, welche zu interessanten Ergebnissen führen. Allgemein ergibt sich: jeder partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von einfach hyperbolischem Typ, welche den Wellencharakter eines physikalischen Vorgangs beschreibt, lassen sich invariante Ausdrücke zuordnen, welche auf eine Riemannsche Metrik führen, auf einen Viererpotentialvektor eines elektromagnetischen Feldes und auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades, welche den Korpuskelcharakter desselben physikalischen Vorgangs beschreibt. Das gleiche gilt von partiellen Differentialsystemen erster Ordnung und total hyperbolischem Charakter, insbesondere für das den Wellencharakter der Elektronenbewegung zum Ausdruck bringende System Diracscher Gleichungen.

M. Pinl (Dacca).

Gião, Antonio: Sur les rapports entre gravitation et électromagnétisme déduits des équations de Codazzi. Application au champ électromagnétique général des astres. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 742—744 (1949).

L'espace-temps V_4 étant considéré comme une variété plongée dans un espace euclidien E_5 , l'A. écrit les équations de Codazzi relatives à ce plongement. Les deux formes quadratiques fondamentales de V_4 étant désignées par g_{ij} et ω_{ij} , ces équations peuvent être mises dans le cas „quasi-statique“ [g_{4i}, ω_{4i} ($i = 1, 2, 3$) dépendant seuls du temps] sous la forme approchée

$$\partial_k \omega_{4i} - \partial_i \omega_{4k} = \chi (\partial_k g_{4i} - \partial_i g_{4k}) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

χ désignant la courbure moyenne de V_4 . Des formules donnant le champ électromagnétique à l'aide des dérivées partielles des g_{ij} en sont déduites, conformément à la théorie unitaire de l'A. [Portugaliae Math. **5**, 145—192 (1946)]. Une application explicite est faite au corps sphérique en rotation qui conduit à un champ électrostatique et à un champ magnétique correspondant à un moment magnétique proportionnel au moment de rotation. La comparaison numérique du champ électrostatique prévu et du champ électrostatique terrestre n'est pas donnée.

Lichnerowicz (Paris).

Gião, Antonio: La constante cosmologique et les équations de Gauss d'une hypersurface. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 812—813 (1949).

Conformément à ce qu'on sait de sa théorie [Portugaliae Phys. **2**, 1—98 (1946)], l'A. suppose que l'espace-temps V_4 , de métrique g_{ij} , est une hypersurface plongée dans un espace euclidien E_5 . La seconde forme quadratique fondamentale ω_{ij} de V_4 traduit les phénomènes électromagnétiques. On sait que, d'après les équations de Gauss pour le plongement d'une variété dans une autre, une hypersurface de classe 1 satisfait aux relations $R_{jk} = g^{il}(\omega_{ik}\omega_{jl} - \omega_{il}\omega_{jk})$. L'A. en déduit une formule approchée donnant la valeur de la constante cosmologique

$$(1) \quad \lambda = 6\chi^2 + 4\chi\bar{\omega}_{44} - \chi T$$

où $\chi = \frac{1}{4}g^{ij}\omega_{ij}$ est la courbure moyenne de V_4 , T la contraction du tenseur d'impulsion-énergie et où $\omega_{44} = \omega_{44} - \chi g_{44}$ (x^4 variable temporelle) est considéré comme petit. Diverses conséquences cosmologiques de la formule (1) sont analysées).

Lichnerowicz (Paris).

Gião, Antonio: Théorie des rapports entre gravitation et électromagnétisme et ses applications astrophysiques et géophysiques. J. Phys. Radium, VIII. S. **10**, 240—249 (1949).

Ce papier constitue un exposé synthétique de la théorie unitaire de l'A. dont les éléments figurent principalement dans Portugaliae Phys. **2**, 1—98 (1946); Portugaliae Math. **5**, 145—192 (1946) **6**, 67—144 (1947); **7**, 1—44 (1948) [ce Zbl. **29**, 191; **31**, 384] et dans les deux notes analysées ci-dessus.

Lichnerowicz (Paris).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Dirac, P. A. M.: Forms of relativistic dynamics. Rev. modern Phys., New York **21**, 392—399 (1949).

Die relativistisch invariante Formulierung eines dynamischen Problems erfordert, wie Verf. zeigt, bestimmte Beziehungen zwischen den Poissonschen Klammern von zehn „Fundamentalgrößen“, nämlich dem Energie-Impuls-Vierervektor und dem Sechservektor des Drehimpulses. Um Lösungen dieser Bedingungen zu finden, kann man entweder, wie üblich, die Dynamik für einen festen Zeitpunkt formulieren („instant form“), oder auf einem dem Lichtkegel eingeschriebenen Hyperboloid (Dirac nennt dies „point form“, weil die zugehörige Untergruppe der Lorentzgruppe einen Punkt invariant läßt), oder auch auf einer mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitenden Wellenfront („front form“). Bei jeder dieser Formulierungen werden einige der Fundamentalgrößen besonders einfach; die restlichen, komplizierten, nennt Verf. „Hamiltonfunktionen“. Die „point form“ hat den Vorzug, daß die Hamiltonfunktionen einen Vierervektor bilden und sich daher die Theorie in voller Tensorsymmetrie formulieren läßt. Die „front form“ besitzt, im Gegensatz zu den beiden anderen Formen, nur drei (statt vier) Hamiltonfunktionen, welche überdies keine Quadratwurzel enthalten; dadurch wird diese Form praktisch besonders bequem. — Die eigentliche Schwierigkeit neue dynamische Systeme anzugeben, besteht bei jeder der drei Formen in dem Auffinden des Wechselwirkungsterms, welcher jeweils einer quadratischen Bedingung zu gehorchen hat. — Ob nur eine oder mehrere dieser Formen mit der Wirklichkeit verträglich sind, läßt sich noch nicht entscheiden.

W. Franz (Münster).

Bureau, Florent: Sur les équations de la mécanique ondulatoire de l'électron. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 104—142 (1949).

Verf. betrachtet die Maxwellschen und die Diraeschen Gleichungen. Bei den Maxwellschen Gleichungen handelt es sich um acht lineare Differentialgleichungen.

erster Ordnung für sechs unbekannte Funktionen, bei den Diracschen um vier lineare Differentialgleichungen erster Ordnung für vier unbekannte Funktionen: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Für

$$\psi_1 = \hbar_1 + i \hbar_2, \psi_2 = \hbar_3 - i \hbar_4, \psi_3 = i (e_1 + i e_2), \psi_4 = i (e_3 - i e_4),$$

und einige weitere vereinfachende Annahmen läßt sich durch Trennung von Real- und Imaginärteil der auftretenden komplexen Funktionen aus dem Diracschen System (formal) das Maxwellsche ableiten. Auf Grund der experimentellen Tatsachen kann man Erscheinungen, die mit der Bewegung eines Elektrons verknüpft sind, in gleicher Weise wie solche optischer und elektromagnetischer Natur gemeinsam durch Wellenausbreitungsgesetze charakterisieren. Aus der Invarianzforderung gegenüber Lorentztransformationen für das erwähnte durch Trennung von Real- und Imaginärteil gewonnene System gelingt es auch Verf., die Diracschen Bewegungsgleichungen für ein einem äußeren elektromagnetischen Feld unterworfenen Elektron abzuleiten. Auch die wellenmechanischen Gleichungen eines Photons von L. de Broglie stehen mit diesem System in Zusammenhang. Verf. studiert ferner die Unterschiede, die sich für die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems des Maxwellschen und des erwähnten durch Trennung der Real- und Imaginärteile entstandenen Systems ergeben; sie sind durch das Huygensche Prinzip bedingt. Das im vorstehenden angedeutete Programm wird weiterhin von Verf. mit großer Ausführlichkeit durchgeführt. Methodisch handelt es sich dabei zunächst um die Anwendung der Anfangswerttheorie linearer partieller Differentialsysteme erster Ordnung mit der entsprechenden Charakteristiken- und Singularitätenflächen-theorie, später um matrizentheoretische Probleme, wie man sie aus der Diracschen Theorie des Elektrons kennt. Naturgemäß bleiben dabei auch Ergebnisse der Theorie der Spinoren nicht aus. *M. Pinl (Dacca).*

Faure, Robert: Correspondance mécanique classique—mécanique ondulatoire. *J. Math. pur. appl.*, Paris, IX. S. 28, 193—285 (1949).

Diese ausführliche Studie zerfällt in zwei Teile. Der erste besteht in der Untersuchung der Korrespondenz zwischen der klassischen Mechanik und der Wellenmechanik hinsichtlich der eingehenden ersten Integrale und gewisser Integrationsmethoden, wie sie bereits Gegenstand der Dissertation des Verf. waren. Im zweiten Teil wird die Bedeutung der Hermitizität für die Bestimmung der quantenmechanischen Operatoren behandelt im Vergleich mit ihren Poissonschen Vorläufern aus der klassischen Mechanik. Im ersten Kapitel wird die Schrödingersche Wellengleichung analysiert und in der bekannten Weise als Verfeinerung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der klassischen Mechanik bzw. der Strahlenoptik interpretiert. Rein kinetische Terme werden Termen gegenübergestellt, welche von der Existenz eines Feldes herrühren, und die intermediären Integrale herausgesucht. Im zweiten Kapitel werden die analytischen Bedingungen für zeitunabhängige Integrale bestimmt. Die ersten Integrale werden im Falle eines skalaren Potentials klassifiziert. Für die Wellenmechanik ergeben sich so zwei Typen. Im dritten Kapitel werden die zeitunabhängigen Integrale ersten Grades untersucht. Jedem linearen Integral der klassischen Mechanik entspricht hier ein erstes Integral der Quantenmechanik und umgekehrt. Im vierten Kapitel werden die zeitunabhängigen Integrale zweiten Grades untersucht und notwendige und hinreichende Bedingungen für gegenseitiges Entsprechen derartiger Integrale aufgestellt. Im fünften Kapitel werden diese Untersuchungen fortgesetzt. Hier gilt: Jedes zweiparametrische mechanische System, welches ein quadratisches Integral gestattet, veranlaßt zugleich ein erstes Integral des zugeordneten quantenmechanischen Problems. Dieses Integral ist von zweitem Grad, und die Wellengleichung ist in diesem Falle integrabel durch Separation der Variablen. In ähnlicher Weise werden dreiparametrische Systeme studiert. Kapitel sechs untersucht ausführlich und systematisch die Zuordnung

klassischer Funktionen und quantenmechanischer Operatoren. Kapitel sieben behandelt die gleichzeitige Existenz eines von einem skalaren Potential abgeleiteten Feldes und eines elektromagnetischen Feldes. Im achten Kapitel werden zeitabhängige erste Integrale untersucht (ersten und zweiten Grades). Die in der klassischen Mechanik durch die sogenannte „Separierbarkeit“ ausgezeichneten Fälle, insbesondere die Liouvilleschen und Stäckelschen Typen, geben Anlaß, die entsprechenden Gegenstücke in der Quantenmechanik aufzusuchen. Dies geschieht in Kapitel neun. Mit allgemeineren Betrachtungen über die Korrespondenz zwischen klassischer und Wellenmechanik wird im zehnten Kapitel der erste Teil der Untersuchung beschlossen. Es folgt noch ein Kapitel elf mit einer eingehenderen Betrachtung der Hermitizität der quantenmechanischen Operatoren, zunächst der Operatoren erster Ordnung, dann auch solcher zweiter und dritter Ordnung. Bei aller Ausführlichkeit wird jedoch in der ganzen Studie das mathematische so hochbedeutsame Eigenwertproblem Hermitescher Operatoren nicht behandelt. *Pinl.*

Faure, Robert: *Méthodes d'intégration communes à la mécanique classique et à la mécanique ondulatoire.* C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 364—365 (1950).

Folgender Satz wird bewiesen: Für Systeme mit zeitunabhängigem Potential können nur die Integrationsprozesse der klassischen Mechanik zur Bestimmung der Eigenfunktionen in der Wellenmechanik herangezogen werden, die in der klassischen Mechanik zu einem ersten Integral der Bewegungsgleichungen führen. Die Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. *Wüster (Wuppertal).*

Goudot, Andrée: *Propriétés cinématiques du corps rigide en mécanique ondulatoire.* C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1140—1142 (1950).

Etudiant dans la théorie des mouvements quantiques de Mlle. Viard (Thèse Doct. Paris 1945) le mouvement du corps solide rigide l'A. exprime au moyen des angles d'Euler les paramètres caractérisant la rotation du trièdre en mouvement quantique par rapport à un trièdre fixe. *G. Petiau (Paris).*

Goudot, Andrée: *Sur la mécanique ondulatoire du corps solide rigide.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 646—647 (1949).

Die Arbeit behandelt das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Dieser Fall hat auch praktische Bedeutung, entspricht er doch zum wenigsten in erster Näherung der Bewegung einer an einen Körper adsorbierten Molekel oder Molekülgruppe. Die zur Behandlung des Problems benötigten Operatoren werden angegeben. Ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen sind bekannt. *Wüster (Wuppertal).*

Costa de Beauregard, Olivier: *Sur l'homogénéité spatio-temporelle dans les phénomènes ondulatoires et sur le problème des énergies négatives.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1205—1206 (1949)

Als Beispiel für die Gleichartigkeit der wellenmechanischen Erscheinungen in Raum und Zeit wird die Beugung an einem Gitter betrachtet. Zu dem gewöhnlichen räumlichen Gitter wird ein zeitliches „Gitter“ in Parallele gesetzt. Ein solches zeitliches Gitter wird durch einen periodischen Vorgang der Frequenz ν_0 an einem festen Punkte des Raumes dargestellt. Die durch eine einfallende Welle der Frequenz ν_i angeregten Streuwellen haben dann die Frequenzen $\nu_\alpha = \nu_i + n\nu_0$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Für $n = -1$ wird hierdurch der Raman-Effekt beschrieben. Beim Raman-Effekt an Molekülen treten wegen der Kleinheit von ν_0 (Rotationsfrequenz) gegenüber ν_i die wegen ihrer Korrespondenz zu den Partikeln mit negativer Energie besonders interessanten Wellen mit negativer Frequenz nicht auf. R. Lennuié gelang jedoch der indirekte Nachweis eines solchen Effektes bei Atomen durch die Anregung von Resonanzstrahlung durch benachbarte Frequenzen; sobald hier die Nachbarfrequenz kleiner ist als die Resonanzfrequenz, treten hier virtuell negative Frequenzen auf. *Wüster (Wuppertal).*

Kodaira, Kunihiko: The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S -matrices. Amer. J. Math. 71, 921—945 (1949).

Liegt eine Differentialgleichung

$$l u' = L u = -\frac{d}{dx} \left\{ p(x) \frac{d}{dx} \right\} u + q(x) u \quad (a < x < b)$$

vor, so kann man für sie bekanntlich eine Reihe von Lösungen — Eigenfunktionen genannt — erhalten. Unter Umständen nimmt der im allgemeinen komplexe Parameter l diskrete Werte an. Als Beispiele kommen die Schrödingersche Gleichung mit dem Operator

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} + V(x)$$

in Betracht, oder die Hillsche Gleichung mit

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad q(x+1) = q(x).$$

Man hat sich nun die Frage gestellt, ob es möglich sei, eine willkürliche Funktion in Abhängigkeit von den Eigenfunktionen einer Differentialgleichung wie der obenstehenden zu entwickeln. Schon vor etwa vierzig Jahren hat H. Weyl das Problem angegriffen und in jüngster Zeit auch E. C. Titchmarsh mittels einer neuen auf dem Residuenkalkül beruhenden Methode. Verf. findet nun die Ergebnisse von Titchmarsh wieder mit Hilfe der Hilbertschen Begriffe des Funktionenraumes. Im engen Anschluß an die Arbeit von Weyl findet Verf. für den Hillschen Operator z. B. kein diskretes Spektrum, für den Schrödingerschen Operator dagegen sowohl ein diskretes als auch ein kontinuierliches Spektrum. Ein neuer Beweis des Heisenbergschen Satzes betreffs der S -Matrix wird am Ende hinzugefügt.

S. C. Kar (Calcutta).

Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot: A general theorem on the transition probabilities of a quantum mechanical system with spatial degeneracy. Physica, The Hague 15, 833—842 (1949).

In der Quantenmechanik ausgearteter Systeme betrachtet Verf. zunächst die totale Übergangswahrscheinlichkeit A_{ij} von einem Anfangszustand n_i zu einem Endzustand n_j . Die Zahlen n_j charakterisieren die Energieniveaus, die Zahlen m_i die Quantenzustände der Komponente des Drehimpulses. Dann gilt

$$A_{ij}(m_i) = \sum_{m_j} A(n_i, m_i; n_j, m_j).$$

Unter $A(n_i, m_i; n_j, m_j)$ sind die partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten zu verstehen. Es handelt sich um alle Übergänge von einem bestimmten Anfangszustand zu allen möglichen Endzuständen. Handelt es sich um alle möglichen Anfangszustände und einen bestimmten Endzustand, so gilt die Formel

$$A'_{ij}(m_j) = \sum_{m_i} A(n_i, m_i; n_j, m_j).$$

Wenn A_{ij} unabhängig von m_i und A'_{ij} unabhängig von m_j ist, ergibt sich die Ornstein-Burgersche Summenregel für die Emission von Licht und „erlaubter“ Übergänge (elektrischer Dipole). Die Verf. beweisen den Satz: die Summe A_{ij} der partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten und ebenso die Summe A'_{ij} sind von m_i bzw. m_j unabhängig, wenn der Hamiltonsche Operator des mechanischen Systems drehinvariant ist. Der Beweis stützt sich auf einen weiteren Satz: ein quantenstatistisches System φ_m (Eigenfunktionen eines bestimmten Eigenwertes des Drehimpulses des Systems) ist dann und nur dann drehinvariant, wenn seine Dichtematrix eine Diagonalmatrix ist:

$$\varrho_{mm'} = \overline{a_m^*} a_m = P_m \delta_{mm'}.$$

Die gewonnenen Ergebnisse sind allgemeineren Charakters und bleiben auch für Multipolstrahlungen („verbotene“ Übergänge) in Kraft. M. Pinl (Dacca).

Matossi, Frank, Robert Mayer and Emma Rauscher: On total absorption in spectra with overlapping lines. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 760—764 (1949).

Die Berechnung der „Gesamtaborption“ (Ladenburg und Reiche) wird durchgeführt für eine Gruppe aus 2 oder auch mehreren benachbarten Spektrallinien, welche alle dieselbe Dämpfungskonstante haben, evtl. aber von verschiedener Stärke sein können. Anwendungen auf die Druckabhängigkeit der Absorption von Bandenspektren werden diskutiert. *A. Unsöld (Kiel).*

March, N. H.: An improved approximate analytic solution of the Thomas-Fermi equation for atoms. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **46**, 356—357 (1950).

Es wird eine gegenüber der Sommerfeldschen Lösung verbesserte analytische Näherungslösung der Thomas-Fermi-Gleichung angegeben. Sie genügt den Randbedingungen und die sich aus ihr ergebende Verteilungsfunktion für die Radialkomponente des Impulses ist normiert. In einer Tafel werden die Werte der exakten Lösung (von Bush und Caldwell numerisch erhalten) mit den Werten der Näherungslösungen von Sommerfeld und March verglichen. Es ergibt sich für die letztere eine bessere Übereinstimmung mit den exakten Werten. *Wüster.*

Bohm, D., M. Weinstein and H. Kouts: Finite relativistic charge-current distributions. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 867 (1949).

Vorläufige Mitteilung über eine lorentzinvariante Theorie des ausgedehnten Elektrons. In dem Ausdruck, der für ein Punktelektron aus der Bahnkurve den Viererstrom zu berechnen gestattet, wird die δ -Funktion abgeändert und ein spinartiger Term hinzugenommen, damit der neue Strom dem Gesetz der Ladungserhaltung genügt. *Höhler (Berlin).*

Landé, Alfred: Interaction between elementary particles. Part. I. II. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 1176—1179 (1949), **77**, 814—816 (1950).

Verf. behandelt einen speziellen Fall der verallgemeinerten klassischen Elektrodynamik von Feynman [*Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74*, 939—946 (1948)]. Man vergleiche hierzu auch die Arbeiten von Bopp (dies. Zbl. **28**, 280) und von Mc Manus (dies. Zbl. **31**, 230). Zur Festlegung der Strukturfunktion, die bei Feynman noch weitgehend willkürlich ist, verwendet er das Bornsche Prinzip der Reziprozität (s. das folg. Referat). Der Energiegleichung $p^2 - (E/c)^2 + m^2 c^2 = 0$ wird die dazu reziproke „Signalgleichung“ $S^2 = r^2 - c^2 t^2 + a^2 = 0$ an die Seite gestellt, durch die eine kleinste Länge eingeführt wird. Damit übernehmen die Hyperboloide $S^2 = 0$ die Rolle des Lichtkegels. Die Strukturfunktion heißt $\delta(S^2)$. *Höhler (Berlin).*

Born, M. and H. S. Green: Quantum theory of rest-masses. *Proc. R. Soc. Edinburgh, A* **62**, 470—488 (1948).

Born, Max: Reciprocity theory of elementary particles. *Rev. modern Phys., New York* **21**, 463—473 (1949).

Ausführliche Darstellung der dies. Zbl. **31**, 378 und **32**, 328 referierten Untersuchungen. Die Feldgleichungen werden für ganzzahligen Spin in der Form $F(p^k p_k) \psi(x) = 0$ angenommen, wo $p_k = i \partial / \partial x^k$ und F ein Produkt von Faktoren $p^k p_k - \kappa^2$ mit verschiedenen Werten von κ^2 ist. Bei halbzahligem Spin steht entsprechend $F(\alpha^k p_k)$ mit Diracschen α -Matrizen. Für so allgemeine Feldtheorien gab Green ein formales Schema, in dem, ausgehend von einem Lagrange-Operator $L = F(p, p^0) \varrho(x, x^0)$, ein Stromvektor und ein Energie-Impuls-Tensor aufgestellt und Vertauschungsregeln für die Quantisierung des Feldes angegeben werden. Das Reziprozitätsprinzip engt die Möglichkeiten für L ein, so daß als κ^2 die Nullstellen von Laguerreschen Polynomen auftreten. Es ergeben sich so unendlich viele Ruhmassen. Nullstellen mit niedrigen Nummern entsprechen (wenn man einen freien Parameter gleich 137 setzt) die 194-fache Elektronenmasse, die 298- und 154-fache Elektronenmasse; die beiden erstgenannten könnten das μ -Meson und das π -Meson sein. Weiter werden Ergebnisse angedeutet, über die noch ausführlich berichtet werden soll. *F. Hund (Jena).*

Kwal, Bernard: Les particules réciproques et la théorie des champs non localisables de Yukawa. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 184—186 (1950).

Die neuen Theorien von Born und Yukawa, betreffend eine in den Impulsen und Koordinaten völlig symmetrisch aufgebaute Quantenmechanik, ermöglichen als Gegenstück zur Größe $m_0 c$ in der Impulsbeziehung die relativistisch invariante Einführung einer Längeneinheit λ in einer entsprechenden Koordinatenbeziehung, welche als quantenmechanisches Gegenstück zum klassischen Teilchenradius interpretiert werden kann. Der Grenzfall $\lambda = 0$ führt zur bisherigen Quantenmechanik von punktförmigen Teilchen, der Fall $m_0 = 0$ darüber hinaus zu den Lichtquanten. Verf. diskutiert nun den Fall $m_0 = 0$ bei endlichem λ . Er nennt die hierdurch beschriebenen Teilchen, die gleichsam das Gegenstück zu den punktförmigen Teilchen mit endlicher Masse darstellen, *particules réciproques*. F. Sauter (Göttingen).

Bopp, Fritz und Friedrich L. Bauer: Feldmechanische Wellengleichungen für Elementarteilchen verschiedenen Spins. Z. Naturforsch. **4a**, 611—625 (1949).

Après avoir discuté la réduction au formalisme canonique des équations de mouvement des particules à spin quelconque, l'A. examine la forme et les caractères des équations d'ondes qui s'en déduisent. La représentation de ces équations d'ondes s'effectue facilement à partir des matrices de l'électron de Dirac en utilisant la méthode de fusion introduite par M. L. de Broglie dans sa théorie du photon et étendue aux corpuscules de spin quelconque par M. L. de Broglie d'une part, H. A. Kramers, F. J. Belinfante, T. K. Lubanski d'autre part. L'A. examine ensuite la classification, la structure et la construction des systèmes irréductibles dont il construit plusieurs cas particuliers remarquables. G. Petiau (Paris).

Pirenne, Jean: Note sur le formalisme des champs quantifiés. Physica, The Hague **15**, 1023—1031 (1949).

Ein aus einer evtl. variablen Anzahl identischer Teilchen zusammengesetztes System läßt bekanntlich sowohl eine Darstellung im Konfigurationsraum als auch eine im Raum der Besetzungszahlen der Eigenzustände zu; letztere ist dabei identisch mit der Darstellung durch quantisierte Felder. In der vorliegenden Arbeit wird die unitäre Matrix, welche den Übergang zwischen den beiden Darstellungen vermittelt, explizit konstruiert und der Zusammenhang ihrer Symmetrieeigenschaften (je nach der von den Teilchen befolgten Statistik) mit den Vertauschungsrelationen der quantisierten Felder aufgezeigt. Schafroth (Zürich).

Feshbach, Herman: The new quantum electrodynamics. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 2 (Massachusetts Institute of Technology, July 29—31, Electromagnetic theory.) 1—19 (1950).

Verf. geht zunächst auf das Verfahren von Bethe zur Berechnung des Lamb-Shifts ein und behandelt dann den Schwingerschen Formalismus. Inzwischen hat Schwinger seine Theorie selbst in drei Arbeiten ausführlich dargestellt (vgl. dies. Zbl. **32**, 94 und **33**, 234). Höhler (Berlin).

Dyson, F. J.: Longitudinal photons in quantum electrodynamics. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **77**, 420 (1950).

In der Schwinger-Tomonagaschen Fassung der Quantentheorie der Strahlung wird der longitudinale Anteil des Strahlungsfeldes getrennt behandelt, ein Vorgang, der die relativistische Formulierung der Theorie erheblich kompliziert. Bei Feynmann gibt es die Unterscheidung zwischen dem longitudinalen und transversalen Anteil des Maxwell-Feldes nicht. In der vorliegenden Note wird gezeigt, wie sich durch Einführung longitudinaler Photonen die Separations-Schwierigkeit der Schwinger-Theorie vermeiden läßt. Touschek (Göttingen).

Feldman, David: On realistic field theories and the polarization of the vacuum. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1369—1375 (1949).

Verf. schließt sich dem Gedanken an, daß eine Lösung der Divergenzschwierigkeiten nur in einer Theorie möglich sei, die die wechselseitigen Beziehungen zwischen

den Elementarteilchen berücksichtigt. Er betrachtet speziell eine Theorie, um zunächst einmal von einem einfachen Modell auszugehen, welches neben dem Elektronenfeld noch zwei weitere Spinorenfelder umfaßt, und neben dem Photonenfeld ein weiteres Bosefeld. Im Ganzen hat er also fünf Felder, ähnlich wie es Wildermuth kürzlich vorgeschlagen hat, welcher aber nur Spinorenfelder kombiniert. Die Theorie wird nach den von Tomonaga, Schwinger, Feynman und Dyson angegebenen Methoden behandelt. Es wird speziell die Polarisation des Vakuums diskutiert. Die Selbstenergie des Photons verschwindet. Aber die Vakuumstromdichte hat noch immer singulären Charakter. Verf. betont, daß dieses negative Ergebnis nicht eigentlich eine Widerlegung der realistischen Auffassung der konvergenzerzwingenden Modifikation der Feldgleichungen sei, was ja Salecker wirklich bewiesen hat. Er vermutet die Lösung in einer Überwindung der üblichen „linearen Feldtheorie“, hält es aber auch für möglich, daß die bisherige Störungstheorie ein ungeeignetes Näherungsverfahren ist. Ref. möchte zu bedenken geben, daß die bisher quantentheoretisch diskutierten Modifikationen der Feldgleichungen nicht einmal in der klassischen Theorie zu physikalisch sinnvollen Konsequenzen führen.

Bopp (München).

Rohrlich, F.: The self-stress of the electron. Phys. Rev., Lancaster Pa., II, S. 77, 357—360 (1950).

Es wird untersucht, ob die Quantenelektrodynamik in ihrer jetzigen Formulierung widerspruchsfrei ist hinsichtlich des Verhaltens der Energie eines Elektrons gegen Lorentztransformationen. Es ist zu verlangen, daß diese die vierte Komponente eines Vierervektors darstellt. Hierzu ist erforderlich, daß die „Eigenspannungen“, d. h. die im Ruhesystem (0) aus dem Energie-Impulstensor gebildeten Größen

$$\int \Theta_{11}^{(0)} d^3x^{(0)}, \quad \int \Theta_{22}^{(0)} d^3x^{(0)}, \quad \int \Theta_{33}^{(0)} d^3x^{(0)}$$

verschwinden. Eine direkte Berechnung liefert jedoch ein endliches Resultat [vgl. Pais-Epstein, dies. Zbl. 35, 133]. Verf. wendet ein formalistisches Regularisierungsverfahren an [vgl. Pauli-Villars, Rev. modern Physics, New York 21, 434—444 (1949)] und findet unter Verwendung der Methoden von Feynman-Dyson, daß die Eigenspannung verschwindet.

Lehmann (Jena).

Rzewuski, J.: Some cut-off methods for the electron selfenergy. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 386—391 (1949).

Es werden einige Abschneideverfahren mit Funktionen lorentzinvarianter Argumente diskutiert, die gestatten, aus der Störungstheorie in ihrer klassischen Formulierung im Impulsraum konvergente Resultate zu erhalten. Wegen der Nichtinvarianz des hierbei wesentlich verwendeten Begriffes des virtuellen Zwischenzustandes genügt dies jedoch noch nicht, damit auch die Resultate lorentzinvariant seien. Doch wird gezeigt, daß für eine besondere Abschneidevorschrift wenigstens diejenigen Terme die richtige Transformationseigenschaft haben, welche im Grenzfalle, daß der Abschneideparameter K gegen unendlich geht, nicht verschwinden. Es ist alsdann möglich, in bekannter Weise zunächst die für $K \rightarrow \infty$ divergierenden Terme als Massen- bzw. Ladungsrenormalisationen zu deuten und anschließend den Grenzübergang $K \rightarrow \infty$ zu machen, worauf man eindeutige, konvergente und lorentzinvariante Resultate erhält. Das Verfahren kann also analog wie die bekannte „Regularisierung“ von Pauli und Villars [Rev. mod. Physics 21, 434—444 (1949)] verwendet werden, liefert jedoch insofern weniger, als die explizite Lorentzinvarianz im Laufe der Rechnung zunächst verloren geht und erst durch Ausführung des Grenzüberganges $K \rightarrow \infty$ wieder hergestellt wird.

Schafroth (Zürich).

Neuman, M. and W. H. Furry: On the interactions of mesons with the electromagnetic field. Phys. Rev., Lancaster Pa., II, S. 76, 1677—1690 (1949).

Analog zur Quantenelektrodynamik in der Schwingerschen Form wird hier

eine Theorie der Wechselwirkung von Mesonen mit elektromagnetischen Feldern entwickelt. Man beschränkt sich auf skalare und vektorielle Mesonen (Spin 0 und 1), für die die Kemmerschen Gleichungen zugrunde gelegt werden. Die Theorie ist lorentzinvariant. Naturgemäß ist das Verfahren umständlicher als bei Schwinger in der Quantenelektrodynamik von Elektronen. Immerhin kann man die longitudinalen Komponenten des elektromagnetischen Feldes in kovarianter Weise eliminieren. Die resultierende Hamilton-Funktion wird zerlegt in zwei Teilfunktionen, von denen die eine den Selbstenergien entspricht, während die andere den Wechselwirkungen zukommt. Die Selbstenergie des Photons verschwindet bei geeigneter Interpretierung einiger nicht eindeutig festlegbarer Ausdrücke. Die Polarisation des mesonischen Vakuums bei vorgegebenem elektromagnetischem Feld wird abgeleitet. Auftretende unendlich große Beiträge müssen durch neue Formalismen beseitigt werden. Die Selbstenergie der Mesonen kann durch Massenrenormalisierung beseitigt werden.

K.-H. Höcker (Stuttgart).

Rosenbluth, Marshall N.: Electromagnetic interactions of a vector meson with a scalar excited state. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 951—957 (1949).

Die Arbeit gibt eine relativistische Theorie für ein zweier Zustände (skalar und Vektor) verschiedener Masse fähiges Meson. Die beiden Zustände sind elektromagnetisch miteinander gekoppelt, so daß der angeregte Zustand γ -aktiv ist. Die aus Berkeley berichtete Erzeugung von γ -Quanten in Nukleon-Nukleon-Prozessen könnte auf diese Art erklärt werden.

Touschek (Glasgow).

Vrkljan, V. S.: Über das magnetische Moment des Mesons. Proc. Indian Acad. Sci. A 30, 205—210 (1949).

Nach der von de Broglie angegebenen „Fusionsmethode“ (L. de Broglie, Particules à spin, Paris 1943) zur Herleitung von Wellengleichungen für Teilchen mit höherem Spin aus der Dirac-Gleichung wird der allgemeine Stromausdruck für ein Teilchen vom Spin 1 und Mesonenmasse in Newtonscher (unrelativistischer) Näherung berechnet. Daraus läßt sich in bekannter Weise durch Untersuchung des Verhaltens eines Wellenpakets in einem äußeren Feld das magnetische Moment des Mesons ableiten. Man erhält das der Mesonenmasse zugeordnete Bohrsche Magneton.

E. Bagge (Hamburg).

Wyk, C. B. van: On the decay of τ -mesons. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 697—709 (1949).

Es wird der Zerfall eines geladenen τ -Mesons (Masse etwa 900 Elektronenmassen) in ein Photon und ein geladenes π -Meson berechnet. Die Kopplung zwischen beiden Feldern trägt das Nukleonfeld, mit dem sowohl für das π -Meson als auch für das τ -Meson eine starke Wechselwirkung angenommen wird. Als Wechselwirkungsenergie wird nur der Teil der gesamten Wechselwirkungs-Hamiltonfunktion genommen, der keine Ableitungen der Meson-Wellenfunktionen enthält. Haben beide Mesonen den Spin 0, so ist die Emission eines Photons aus Gründen der Impulserhaltung verboten. In allen anderen Fällen ist die Lebensdauer für einen Prozeß $\tau^+ \rightarrow \pi^+ + \gamma$ viel kleiner als 10^{-12} sec. Das τ -Meson wäre demnach zu instabil, um in der photographischen Platte beobachtet zu werden.

Oehme.

Gaus, H.: Zur Spin-Bahn-Koppelung im Atomkern. Z. Naturforsch. 4a, 721—723 (1949).

L'A. examine l'approximation correspondant à l'introduction du terme de couplage spin-orbite dans le cas d'un nucléon représenté par une équation d'ondes de Dirac soumis à un potentiel mésique vectoriel de la forme

$$\frac{g}{c} [\varphi^\circ - \vec{\alpha} \cdot \vec{\varphi}] + \frac{f}{c\alpha} [i\beta \vec{\alpha} \text{ grad } \varphi^\circ + \beta \vec{\sigma} \text{ rot } \vec{\varphi}]$$

et discute l'influence de ce terme dans l'évaluation des niveaux pour un puits de

potentiel de la forme

$$g \varphi_0 = -V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } 0 < r < R \\ -V_0 + \frac{V_0}{R}(r-R) & \text{pour } R < r < R+R' \\ 0 & \text{pour } r > R+R' \end{cases}$$

G. Petiau (Paris).

Couteur, K. J. Le: The evaporation theory of nuclear disintegrations. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 63, 259—282 (1950).

Die Arbeit stellt eine Weiterführung der thermodynamisch-statistischen Theorie der Kernverdampfungen dar, wie sie schon von Bethe (1937) und Weißkopf (1937) begonnen wurde. Eine Beziehung zwischen Anregungsenergie und Kerntemperatur wird abgeleitet, die auch den Einfluß der Auflockerung der Kernmaterie bei großen Anregungen mit berücksichtigt. Außerdem aber wird die Theorie auch auf die Emission größerer Kernbruchstücke, also solcher der Massen 2, 3 und 4, ausgedehnt, wobei die Weißkopfsche Methode des Verdampfungs-gleichgewichts zur Berechnung der Emissionswahrscheinlichkeiten angewendet wird. Beim Vergleich der theoretisch abgeleiteten Energiespektren für die verschiedenen Teilchensorten mit den aus Beobachtungen in Photoplatten gewonnenen experimentellen zeigt sich, daß zwar im Falle der Protonen, nicht aber bei den schwereren Kernbruchstücken Übereinstimmung mit der Erfahrung erzielt wird. Dies gilt sowohl hinsichtlich der relativen Häufigkeiten der verschiedenen Teilchensorten als auch in bezug auf die Form der Verteilungskurven. Verf. weist darauf hin, daß offenbar eine schon vom Ref. (1938 und 1941) diskutierte Erniedrigung des Gamowberges der Kerne bei hohen Anregungsenergien eine wesentliche Rolle spielt. Darauf deuten auch die experimentellen Ergebnisse der Untersuchungen von Harding, Lattimore und Perkins (1950) sehr deutlich hin.

Bagge (Hamburg).

Frankel, S. and N. Metropolis: Calculations in the liquid-drop model of fission. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 72, 914—925 (1947).

Es wird mittels elektrischer Methoden (Eniac) der Energieverlauf berechnet, wenn eine kugelförmige elektrische Ladung durch stetige Deformation in 2 Teile zerlegt wird. Die Deformationsformen, die berücksichtigt werden, sind axial und zumeist auch 2-seitig symmetrisch und werden außerdem als durch eindeutige Funktionen des Radius in Abhängigkeit vom Polarwinkel darstellbar angenommen. Frühere Rechnungen werden dabei präzisiert und erweitert, teilweise in graphischer Form dargestellt. Es ergeben sich keine Hinweise für eine Deutung des asymmetrischen Zerfalls des Urkerns.

Volz (Erlangen).

Gardner, J. W.: Directional correlation between successive internal-conversion electrons. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 763—779 (1949).

Im Anschluß an ein Verfahren von Yang zur Bestimmung der Richtungsverteilung bei Kernprozessen berechnet Verf. die Winkelbeziehungen zwischen den „conversion electrons“ eines kaskadenartigen γ - γ -Prozesses lediglich an Hand allgemeiner Symmetriebetrachtungen. Die gesamten Untersuchungen basieren auf den Voraussetzungen, daß die beiden emittierten s-Elektronen ihren Spin nicht ändern und der gesamte Drehimpuls aller übrigen Elektronen ebenfalls unverändert bleibt. Die Winkelverteilung läßt sich nach einigen Umformungen als Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen anschreiben, deren Koeffizienten von dem Kerndrehimpuls in den einzelnen Zuständen und von dem Bahndrehimpuls der emittierten Elektronen abhängig sind. Zur Berechnung der Koeffizienten werden in den praktisch interessierenden Bereichen Tabellen angegeben. Der Gültigkeitsbereich der obigen Voraussetzungen wird diskutiert.

Ecker (Bonn).

Sapiro, I. S.: Umwandlung eines γ -Quants an einem Elektron des β -Zerfalls. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 53—55 (1949) [Russisch].

Es wird die Übergangswahrscheinlichkeit für einen modifizierten β -Zerfallsprozeß berechnet, unter der Annahme, daß elektromagnetische Wechselwirkung des entstehenden Elektrons mit dem angeregten Kern einen Einfluß ausübt. Dabei ist zu unterscheiden, ob der Kern durch den β -Übergang angeregt wird oder ob Energie von dem bereits angeregten Kern auf Elektron und Neutrino übertragen wird. Für die Beobachtbarkeit solcher Prozesse ergeben sich sehr geringe Wahrscheinlichkeiten.

Gora (Rhode Island/Providence).

Hansson, Ingvar F. E. and Lamek Hulthén: The photo-disintegration of the deuteron. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1163—1165 (1949).

Die magnetische und elektrische Komponente des Wirkungsquerschnittes für den Deuteron-Photo-Effekt wird für drei γ -Energien (2,62, 2,76 und 6,2 MeV) berechnet. Der Kraft-Ansatz ist ein zentral symmetrisches Mesonpotential, für dessen Austauschcharakter drei verschiedene Annahmen durchgerechnet werden (Møller-Rosenfeld, gewöhnliche Kräfte und eine Wechselwirkung, die für den 3P -Zustand verschwindet). 2 mögliche Werte der Mesonen-Masse (200 und 300) werden berücksichtigt, und die Konstanten werden für zwei Bindungs-Energien des Deuterons (2,19 bzw. 2,24 MeV) aus der Bindungsenergie und dem Wirkungsquerschnitt für die Streuung langsamer Neutronen durch Protonen bestimmt. Insbesondere werden die differentiellen Wirkungsquerschnitte für Vorwärts- und 90° -Prozesse berechnet, und es zeigt sich, daß der γ -Rückstoß nicht vernachlässigt werden kann.

Touschek (Glasgow).

Low, Francis: On the effects of internal nuclear motion on the hyperfine structure of deuterium. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 361—370 (1950).

Die experimentellen Ergebnisse der Hyperfeinstrukturmessung von H und D ergeben eine Abweichung von den aus der Fermischen Formel berechneten theoretischen Werten. Die von H. Brown vorgeschlagene Deutung dieser Diskrepanzen läßt die Möglichkeit eines Rückschlusses auf die Kernstruktur des Deuteriums aus Messungen der Hyperfeinstruktur vermuten. Dementsprechend führt Verf. unter Berücksichtigung der inneren Kernbewegung, ausgehend von der kräftefreien Dirac-Gleichung für das Elektron und der nichtrelativistischen Wellengleichung des Kerns, eine Störungsrechnung in erster und zweiter Näherung durch. Obschon die Ergebnisse im Einklang mit den Experimenten sind, erlauben die theoretischen und experimentellen Unsicherheiten im Augenblick noch keine Folgerungen auf die Abweichungen des Kernmagnetfeldes vom Dipolmoment zu ziehen.

Ecker (Bonn).

Marty, C.: Relativistic interactions between two nucleons. Nature, London 165, 361—362 (1950).

Die Arbeit enthält eine Kritik der Van Hoveschen (dies. Zbl. 33, 328) Behandlung des relativistischen Deuterium-Problems. Sie enthält ferner die Resultate der in Bornscher Näherung durchgeführten Rechnungen zur Bestimmung des Neutron-Proton-Wirkungsquerschnittes. Die Diskrepanz zwischen dem mit den Møller-Rosenfeldschen Konstanten berechneten unrelativistischen Wirkungsquerschnitt ($13,5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$) und dem gemessenen ($9 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$) wird durch die relativistische Korrektur vertieft. Für 90 MeV-Neutronen ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt von $16,2 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$.

Touschek (Göttingen).

Fuchs, K.: Perturbation theory in neutron multiplication problems. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 62, 791—799 (1949).

Verf. gibt eine systematische Störungstheorie für die Berechnung des kritischen Volumens von spaltbarem Material für kleine Änderungen der Kerneigenschaften der Systeme, welche durch die reziproke mittlere freie Weglänge $\Lambda(r)$ und die Zahl $\beta(r)$ der pro Wegeinheit des Primärneutrons gestreuten und durch Spaltung erzeugten Neutronen gekennzeichnet sind. Es wird vorausgesetzt, daß alle Neutronen die gleiche Geschwindigkeit haben. Die Theorie beruht auf der systematischen Entwicklung nach dem System der orthogonalen Eigenfunktionen der Integralgleichung

für die Neutronendichte. Die Multiplikation einer Neutronenquelle innerhalb des spaltbaren Systems wird diskutiert und der Multiplikationsfaktor für ein System in nahezu kritischem Zustand wird als Funktion des Quellenortes hergeleitet. Schließlich wird die Multiplikation für eine anisotrope Quelle behandelt, und der Einfluß der Einführung einer Sonde in das Zentrum eines fast-kritischen, sphärischen Systems auf die Neutronendichte und die Zahl der entweichenden Neutronen wird im Zusammenhang mit Messungen des Absorptionsquerschnittes diskutiert. Eine Abschätzung über die Zunahme der kritischen Masse infolge eines Hohlraumes wird durchgeführt. Auf den Einfluß einer Änderung von α auf die Neutronendichte wird kurz hingewiesen.

W. Glaser (Wien).

Halpern, Otto and R. K. Luneburg: Multiple scattering of neutrons. II. Diffusion in a plate of finite thickness. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1811—1819 (1949).

In einer früheren Arbeit [Halpern, Luneburg and Clark, Phys. Rev. 53, 173 (1938)] wurde eine strenge Lösung der Boltzmannschen Transportgleichung für die Dichte und Stromverteilung von Neutronen angegeben, wenn diese mit einer willkürlichen Geschwindigkeitsverteilung auf eine Platte von unendlich großer Dicke auffallen. Es wurde angenommen, daß die Elektronen elastische, isotrope Streuprozesse und Einfangungen innerhalb des Materials erfahren. In der vorliegenden Arbeit wird die Berechnung unter den gleichen physikalischen Annahmen auf den Fall einer Platte von endlicher Dicke ausgedehnt. Analytische Ausdrücke für Dichte und Strom der an der Grenzfläche zurückkehrenden und durchgelassenen Neutronen werden hergeleitet. Ebenso werden Strom- und Dichteverteilung innerhalb des Materials in entsprechend großer Entfernung von den Begrenzungen berechnet. Tabellen für die Lösung und für Hilfsfunktionen werden angegeben.

W. Glaser (Wien).

Pignedoli, Antonio: Sulla teoria della diffusione dei neutroni „termici“. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 2, 96—107 (1948).

Die Integro-Differentialgleichung einer ebenen Neutronenverteilung wird mittels Laplace-Transformation gelöst. Bedeutet ϑ den Winkel der Geschwindigkeitsrichtung mit der x -Achse, so genügt die Neutronendichte $f(x, \cos \vartheta, t)$ der Integro-Differentialgleichung

$$\partial f / \partial t + v \cos \vartheta \partial f / \partial x = N v \sigma_s \int_0^\pi \frac{1}{2} f(1 + 3 P \cos \vartheta \cos \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' - f v N(\sigma_s + \sigma_c),$$

wobei v , N , σ_s , σ_c und P bestimmte Konstante bedeuten. Man setzt

$$f(x, \cos \vartheta, t) = e^{-\omega t} F(x, \cos \vartheta, t) \quad \text{mit} \quad \omega = v N(\sigma_s + \sigma_c).$$

Aus den bekannten Funktionen $\varphi(p, \cos \vartheta) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(0, \cos \vartheta, t) dt$ und

$\Psi(q, \cos \vartheta) = \int_{-\infty}^0 e^{q\alpha} F(x, \cos \vartheta, 0) dx$ kann dann die Lösung $F(x, \cos \vartheta, t)$ in Gestalt einer absolut konvergenten Reihe explizit angegeben werden.

W. Glaser.

Goldoni, Gino: Teorema di unicita' per una equazione integro-differenziale che regge il fenomeno di diffusione dei „neutroni termici“ in paraffina. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 3, 138—141 (1949).

Es wird gezeigt, daß die von A. Pignedoli angegebene Lösung der Integro-Differentialgleichung für die Diffusion thermischer Neutronen (s. vorsteh. Referat) eindeutig ist.

W. Glaser (Wien).

Huang, Su-Shu: A new formulation of the variational principle for scattering problems. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 866—867 (1949).

Die Lösung des Streuproblems der Schrödinger-Theorie wird auf ein Variationsproblem zurückgeführt. Das Variationsproblem lautet (für den Fall der S -Streuung)

$$\delta \int F(f_r, g_r, f, g; r) dr = 0$$

F ist eine durch das Potential und die Gesamt-Energie definierte Funktion der in der Entwicklung $\psi(r) = f(r) \sin kr + g(r) \cos kr$ auftretenden Amplitudenfunktionen f und g und ihrer Ableitungen f_r, g_r . Die Schrödingergleichungen für die Funktionen f und g erscheinen als die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems. Die Methode kann auf den Fall beliebiger Drehimpulse verallgemeinert werden und gestattet auch eine Berechnung der Streuung eines Elektrons an einem neutralen Wasserstoff-Atom.

Touschek (Göttingen).

Critchfield, C. L. and D. C. Dodder: Phase shifts in proton-alpha-scattering. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 602—605 (1949).

Die Arbeit ist eine Phasen-Analyse der kürzlich von Freier, Lampi, Sleator und Williams [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1345—1378 (1949)] durchgeführten Messungen zur Streuung von Protonen an α -Teilchen. Die Phase der S -Welle ist negativ und recht klein, $P_{3/2}$ und $P_{1/2}$ geben einen positiven Phasenwinkel. In beiden Fällen handelt es sich um eine Resonanz. Eine Messung der Polarisierung der Protonen sollte es möglich machen zu entscheiden, ob der virtuelle Zustand Li_5 ein anomales Spin-Dublett darstellt.

Touschek (Göttingen).

Jánossy, Lajos and James McConnell: Scattering by a nuclear potential. Proc. Irish Acad. A 52, 203—222 (1949).

Verff. fragen nach den Bedingungen, unter denen man bei der Untersuchung von Streuproblemen die numerische Lösung der Wellengleichung durch Anwendung einfacher Näherungsverfahren, insbesondere der Bornschen Methode, vermeiden kann. Als Wechselwirkungspotential legen die Autoren das Yukawasche Potential in der einfachsten Form $g^2 \cdot e^{-kr}/r$ zugrunde. Mit diesem Ansatz ist auch der Coulomb-Fall erfaßbar ($k = 0$). Das Ergebnis der Rechnungen ist, daß bei geringen Energien oder bei kleinen Streuwinkeln die Anwendung der Bornschen Methode für Neutron-Proton-Streuung durchweg nicht erlaubt ist. Bei hohen Energien ($E > 10^9$ eV) ergibt sich eine Abhängigkeit von der Mesonenmasse und der Kopplungskonstanten g . Wenn die Mesonenmasse mit $1/10$ der Nukleonenmasse und $g^2/hc = 0,054$ angesetzt wird (nach den Ergebnissen der Møller-Rosenfeldschen Theorie), scheint die Bornsche Näherung verläßliche Resultate bei großen Streuwinkeln zu geben. — Für die Streuung von Elektronen am abgeschirmten Coulombfeld des Wasserstoffkerns ist die Bornsche Methode unanwendbar, wenn die Elektronenenergie unter 500 eV bei kleinen Streuwinkeln und unter 50000 eV bei großen Streuwinkeln liegt. Bei einem nicht-abgeschirmten Coulombfeld ist die Anwendung der Bornschen Methode entweder überhaupt verboten oder unzumutbar.

K.-H. Höcker (Stuttgart).

Fajnberg, V. Ja. und E. L. Fejnberg: Elektromagnetische Ausstrahlung bei Zusammenstoßen Proton-Neutron. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 45—47 (1949) [Russisch].

In Ergänzung einer Arbeit von Pomerančuk und Šmuškevič [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 499—502 (1949)] wird auf die Bedeutung einer Analyse der bei Zusammenstoßen von Kernteilchen emittierten Lichtquanten verwiesen. Es ließen sich so wichtige Aufschlüsse über die Natur der Kernkräfte, insbesondere ihre Spinabhängigkeit, gewinnen. Insbesondere wäre die Möglichkeit eines Austausches der magnetischen Momente in Betracht zu ziehen, da die dabei emittierte Strahlung sich in charakteristischer Weise von der bei Ladungsaustausch emittierten unterscheiden würde.

Gora (Rhode Island/Providence).

Eyges, L.: Straggling of electrons near the critical energy. II. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 77, 81—85 (1950).

Die vorliegende Arbeit führt eine frühere unter dem gleichen Titel weiter (dies. Zbl. 33, 238). Der Fortschritt besteht in einer genaueren Berücksichtigung der Ausstrahlung, für die ein energieabhängiger Ausdruck nach einem Vorschlag von L. W. Richards und Nordheim [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74,

1106—1113 (1948)] verwendet wurde. Die numerischen Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit denen von Richards und Nordheim. *K.-H. Höcker.*

Fano, U.: Penetration and diffusion of X-rays through thick barriers. II. The asymptotic behavior when pair production is important. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 739—742 (1949).

In Fortführung einer früheren Arbeit [Bethe, Fano and Karr, *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 538 (1949)] wird das Berechnungsverfahren erweitert, um auch die Durchdringungsfähigkeit von energiereichen Röntgenstrahlen, die durch Paarerzeugung absorbiert werden, zu erfassen. Dabei beschränkt sich die Approximation auf die härtesten Komponenten, bei denen außerdem die durch Streuung verursachten Ablenkungen vernachlässigt werden. Es ergibt sich, daß die Variation der Intensität mit der Eindringtiefe x einem Gesetz folgen soll, das vom Typus $x^{-5/6} \cdot \exp(-\mu_m x + b x^{1/2})$ ist. *W. Glaser (Wien).*

Ivanenko, D. und V. Gurenidze: Ausstrahlung vom Überlichttypus bei Durchgang geladener Teilchen durch einen Ferromagneten. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 67, 997—1000 (1949) [Russisch].

Verff. zeigen, daß beim Durchgang geladener Teilchen durch Ferromagnetika neben Ionisationsverlusten auch Cerenkov-Strahlung auftreten muß, sobald die Geschwindigkeit der Teilchen $v > c/\sqrt{\mu_0}$ (μ_0 statische magnetische Permeabilität, Dielektrizitätskonstante = 1) ist. *Gora (Rhode Island/Providence).*

Skobel'cyn, D. B.: Über den Verlauf der „Korrelationskurve“ von Auger-Schauern bei großen Abständen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 67, 255—258 (1949) [Russisch].

Mit zwei Gruppen von Zählrohren wurden von Zacepin u. a. Koinzidenzen bis zu Entfernungen von 1000 m beobachtet. Wollte man diese normalen Augerschen Schauern zuschreiben, so müßte man Energien der einfallenden Teilchen bis zu 10^{28} eV annehmen. Zwecks Klärung dieser Frage unternimmt Verf., alle willkürlichen Annahmen aus der Theorie der Kaskadenschauer auszuschalten, und kommt zum Schluß, daß das Vorhandensein von Kernteilchen in solchen Schauern für ihre Ausdehnung von entscheidender Bedeutung sein kann. Es sei allerdings auch die Möglichkeit eines „genetischen Zusammenhangs“ zwischen weit auseinander liegenden Schauern in Betracht zu ziehen, aber diese Frage ließe sich nur durch direkte Experimente entscheiden. *Gora (Rhode Island/Providence).*

Snyder, Hartland S.: Comparison of calculation on cascade theory. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 1563—1571 (1949).

Die Gleichungen der Kaskadentheorie der Elektronenschauer werden mit verbesserten mathematischen Methoden gelöst. Die Ergebnisse werden mit den älteren Arbeiten des Autors und mit den Rechnungen anderer Autoren über den gleichen Gegenstand verglichen. Im einzelnen sind numerische Lösungen angegeben für die von einem Elektron, für die von einem Lichtquant und für die von einem Potenzspektrum von Lichtquanten ausgelösten Kaskaden. *K.-H. Höcker (Stuttgart).*

Heitler, W. and L. Jánossy: On the size-frequency distribution of penetrating showers. *Proc. phys. Soc. London, Sect. A* 62, 669—683 (1949).

Die Arbeit untersucht, ob die Beobachtungen über die harten Schauern mit der pluralen Theorie der Mesonenerzeugung verträglich sind. Dazu werden die „dünnen“ Spuren in Kernzertrümmerungen, die durch Photoplatten registriert wurden, herangezogen. Zu der Untersuchung werden alle Kernzertrümmerungen herangezogen, die drei und mehr relativistische Teilchen (dünne Spuren) enthalten. Von diesen wird die Hälfte entsprechend dem beobachteten Überschuß an positiven Ladungen Protonen zugeschrieben. Die andere Hälfte umfaßt Mesonen. — Die Rechnung konzentriert sich zunächst auf die Theorie der Mesonenproduktion nach der „pluralen“ Hypothese. Unter pluraler Mesonenproduktion versteht man den

folgenden Prozeß. Pro Wechselwirkung von Nukleon mit Nukleon wird ein Meson erzeugt. Aus einem Kern, der mehrere Nukleonen enthält, können bei ausreichender Energie des Primärteilchens durchaus mehrere Mesonen herauskommen, da das Primärteilchen nacheinander mit den Nukleonen dieses Kerns reagieren wird. Im Gegensatz dazu steht die multiple Auffassung, vertreten durch Heisenberg, die für jede einzelne genügend energiereiche Wechselwirkung bereits mit der Entstehung mehrerer Mesonen rechnet. Der Wirkungsquerschnitt für die Mesonenerzeugung nach der pluralen Theorie hat die Form $\Phi(\varepsilon/E) d\varepsilon/E$, wo E die Energie des Primärteilchens und ε die abgegebene Energie ist. Der Funktionsverlauf Φ braucht nicht festgelegt zu werden, da es für die gestellte Aufgabe nur auf einen Mittelwert ankommt. Für das integrale Energiespektrum der Primären nimmt man ein Potenzgesetz gemäß $E^{-1,5}$ an. Die Ergebnisse können mit der Erfahrung in Einklang gebracht werden. Andererseits ist durch diese Überlegungen nicht die andere Möglichkeit, die multiple Mesonenproduktion, auszuschließen. *K.-H. Höcker.*

Feather, N.: The theory of counting experiments using pulsed sources: chance coincidences and counting-rate losses. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **45**, 648—659 (1949).

Unter der Voraussetzung einer Quelle von zeitlich variabler Emissionsstärke bestimmt Verf. den Einfluß der zeitlichen Veränderung auf die Ausmessung zufälliger Koinzidenzen und die Anzahl der gezählten Teilchen. Die Verwendung der Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt nach einfachen Umformungen für beide Fälle Formeln, die das Verhältnis der untersuchten zeitlich veränderlichen zu den entsprechenden stationären Größen beschreiben. Die allgemeinen Formeln werden für die speziellen Fälle zweier periodischer Quellstärken näher untersucht und die entsprechenden Voraussetzungen diskutiert. *Ecker (Bonn).*

Pasquier, Fernand: Interprétation théorique des phénomènes d'autocatalyse en biologie. *C. r. Acad. Sci., Paris* **226**, 437—438 (1948).

Quantentheoretische Ansätze zur Entstehung der Proteine; frühere Gedanken des Verf. werden in Zusammenhang gesetzt mit Entwicklungen von Mme. Destouches [*C. r. Acad. Sci., Paris* **224**, 1070 und **225**, 466 (1947)]. Der autokatalytische Prozeß, der die Bildung von Proteinen beherrscht, wird als quantentheoretische Resonanz beschrieben. *Egon Ullrich (Gießen).*

Bau der Materie:

Burkhardt, G.: Dispersionsvermögen und Eigenschwingung eines ionisierten Gases. *Ann. Phys., VI. F.* **5**, 373—380 (1950).

Die seit langem, zuletzt von Darwin [*Proc. R. Soc. London A* **146**, 17—46 (1934)]; dies. Zbl. **10**, 43 und **182**, 152—166 (1943)] diskutierte Frage, ob in der Dispersionsformel für ein Plasma der Lorentzsche Polarisationsterm berücksichtigt werden muß, wird in dieser Arbeit von neuem behandelt. Es geschieht das hier durch einen Grenzübergang vom neutralen Gas her, bei dem man die Bindung (Eigenfrequenz) der mitschwingenden Elektronen zu immer kleineren Werten übergehen läßt. Aus der Bewegungsgleichung dieser Polarisations-elektronen $\ddot{x} - \omega_0^2 x = e/m (\mathcal{E} + 4\pi/3 \mathfrak{P})$ erhält der Verf. durch Mittelung über die Lorentzschen, die Lage und Geschwindigkeit beliebig ändernden „Stöße“ den üblichen Ausdruck für den komplexen Brechungsindex. Man darf nun aber nicht einfach für die Eigenfrequenz der Polarisations-elektronen den Grenzübergang $\omega_0 \rightarrow 0$ machen, um das Verhalten „freier“ Elektronen zu beschreiben; der Übergang zu freien Elektronen erfolgt vielmehr in einem Gas von endlicher Dichte dann, wenn die von dem Atomrumpf auf das Elektron wirkenden Bindungskräfte von derselben Größe werden, wie das von den umgebenden polarisierten Atomen her-rührende Feld. Daraus ergibt sich für die Eigenfrequenz der Polarisations-elektronen

eine endliche untere Grenze $\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / 3m}$. Die Dispersionsformel des Plasmas wird dann $n^2 - 1 = -\frac{3\pi N e^2}{m} \frac{1 + i\gamma/\omega}{\omega^2 + \gamma^2}$ und phänomenologisch verhält sich das Plasma wie ein Medium mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$ und mit einer komplexen Leitfähigkeit. Es läßt sich ferner zeigen, daß ω_p als Eigenfrequenz für freie Plasmaschwingungen gedeutet werden kann. Zum Schluß teilt der Verf. noch eine Überlegung über die Energie des elektromagnetischen Feldes in einem Plasma mit. Ein scheinbarer Widerspruch mit dem üblichen Wert für die Strahlungsenergie findet physikalisch seine Auflösung dadurch, daß ein Teil der Feldenergie als magnetische Energie dem Strahlungsfeld verloren geht. *R. Seeliger.*

Beckman, Lars: The influence of a transverse magnetic field on a cylindrical plasma. Proc. phys. Soc., London **61**, 515—520 (1948).

Die Schottkysche Diffusionstheorie der positiven Säule einer Glimmentladung wird auf den Fall eines querverrichteten Magnetfeldes ausgedehnt. Es werden die von Tonks und Allis gegebenen Ausdrücke für die Beweglichkeiten im Magnetfeld benutzt. Durch verschiedene vereinfachende Annahmen (keine Volumenrekombinationen, Zahl der Ionisationen pro ccm und sec = $z'N$ mit $z' = \text{const}$ und $N = \text{Elektronendichte}$) wird das Problem auf die Integration der Diff. Gl.

$$D_a \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) + c \frac{\partial N}{\partial x} + z' N = 0$$

zurückgeführt. Hierbei sind x und y kartesische Koordinaten senkrecht zur Säulenachse, während D_a , c und z' als konstant betrachtet werden (trotz teilweise exponentieller Abhängigkeit von der Elektronentemperatur). Die Lösung zur Randbedingung $N = 0$ für $x^2 + y^2 = r_0^2$ kann dann geschlossen durch eine Zylinderfunktion angegeben werden. Es folgt ein Anwachsen der benötigten elektrischen Längsfeldstärke mit dem magnetischen Querfeld. Die Ergebnisse werden für H_2 , N_2 , He , Ne und A mit dem Experiment verglichen. Die Übereinstimmung ist mäßig; dies kann zu einem Teil an der Wirkung von Verunreinigungen des Gases (besonders durch O_2) liegen. *Schlüter (Göttingen).*

Yvon, J.: La mécanique statistique des états condensés. J. Phys. Radium, VIII. S. 10, 373—380 (1949).

Die Arbeit enthält einige Betrachtungen über die Verwendung verallgemeinerter Dichtefunktionen in der statistischen Theorie der Flüssigkeiten. Kennt man die Funktion $n(1, 2)$, die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein Atom an der Stelle 1, und irgendein anderes an der Stelle 2 befindet, so lassen sich damit exakte Ausdrücke für die Schwankung der Atome in einem gegebenen Volumen und die Zustandsgleichung angeben. $n(1, 2)$ läßt sich aus der Streuung von Röntgenstrahlen berechnen. Andererseits gibt es ein System von Rekursionsformeln, die $n(1)$, $n(1, 2)$, $n(1, 2, 3)$ und höhere Dichten miteinander verknüpfen. Man kann daraus Näherungsausdrücke für $n(1, 2)$ gewinnen, indem man das System dadurch abbricht, daß man die Dichte höchster Ordnung durch ein Produkt niederer Dichten darstellt (vgl. die Arbeiten von Born). Man kann dann die Zustandsgleichung auf die molekulare Wechselwirkung zurückführen, und erhält ähnliche Ausdrücke wie in der Mayerschen Theorie. Durch eine Verallgemeinerung der Methode läßt sich die Verteilungsfunktion der Fermistatistik erhalten. *Koppe (Vancouver).*

Pryce, M. H. L.: A modified perturbation procedure for a problem in paramagnetism. Proc. phys. Soc. London, Sect. A **63**, 25—29 (1950).

Bei der Bestimmung der Energieniveaus paramagnetischer Ionen in Kristallen muß man die wellenmechanische Störungsrechnung bis zur zweiten Näherung durchführen. Die Besonderheit dabei ist, daß die Energiestörung erster Ordnung durch die Spinaufspaltung im äußeren Magnetfeld von der gleichen Größenordnung ist wie die Energiestörung zweiter Ordnung durch die Spin-Bahn-Kopplung. Durch geringfügige Modifizierung des üblichen Störungsverfahrens gelingt Verf. die formale Behandlung dieses Problems. *Sauter (Göttingen).*

Pryce, M. H. L. and K. W. H. Stevens: The theory of magnetic resonance-line widths in crystals. *Proc. phys. Soc. London, Sect. A* **63**, 36—51 (1950).

Es wird die Term aufspaltung für paramagnetische Ionen in Kristallen studiert für den Fall, daß die magnetische Wechselwirkung zwischen den Ionen groß ist gegenüber der Wechselwirkung dieser Ionen mit dem Gitter. Unter der Annahme, daß die Temperatur weit über dem Curiepunkt liegt, werden auf diese Weise die mittlere Verschiebung und Verbreiterung der Resonanz-Absorptionslinie berechnet und der Einfluß der Hyperfeinstruktur und der Austauschkräfte zwischen den Ionen abgeschätzt.

Sauter (Göttingen).

Möglich, F. und R. Rompe: Zur Theorie der Supraleitung. *Ann. Phys.*, **VI**, **F**, **6**, 177—192 (1949).

Es wird gezeigt, daß aus den Bewegungsgleichungen des Elektronenplasmas die v. Laue-Londonschen Gleichungen folgen. Das kommt dadurch zustande, daß der Term $(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v}$, der im substantiellen Differentialquotienten von \vec{v} steht, umgeformt wird in $[\vec{v} \text{ rot } \vec{v}] - \frac{1}{2} \text{ grad } v^2$. Man kann dann annehmen, daß das zweite Glied durch Potentialdifferenzen (Oberflächenladungen?) aufgehoben wird; das erste kompensiert dann gerade die Kraft des Magnetfeldes auf den Strom. Allerdings ist damit nur gezeigt, daß die 6 Londonschen Gleichungen mit den 3 Gleichungen der Plasmadynamik verträglich sind. (Ähnliches ist bekannt: wenn man die zweite Londonsche Gleichung, $\text{rot } \lambda I = H/c$, als Anfangsbedingung fordert, dann gilt sie immer.) Weiterhin wird die Wechselwirkung des Plasmas mit den Gitterschwingungen diskutiert. Auf Grund früherer Rechnungen kann das Plasma nur Transversalschwingungen ausführen. Eine Wechselwirkung zwischen dem (streng als Kontinuum behandelten) Plasma und dem Gitter kann also nur über die magnetische Koppelung der mit den Schwingungen verbundenen Ströme erfolgen. Ein Energieaustausch ist nicht möglich, da die Quanten der Plasmaschwingungen etwa 100mal größer sind als die der Gitterschwingungen.

Koppe (Vancouver).

Born, Max und Kaj-Sia Šeng: Zur Theorie der Supraleitfähigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **n. S.** **62**, 313—318 (1948) [Russisch].

Siehe dies. Zbl. **30**, 334.

F. Hund (Jena).

Gisolf, J. H.: On the spontaneous current fluctuations in semiconductors. *Physica, The Hague* **15**, 825—832 (1949).

Es wird darauf hingewiesen, daß in Halbleitern die Anzahl der Leitungselektronen statistischen Schwankungen unterworfen ist, die zu einem zusätzlichen Widerstandsrauschen Anlaß geben. Im Gegensatz zu dem normalen, durch die Brownsche Bewegung bedingten Widerstandsrauschen ist aber jetzt das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta I)^2$ des Stromes proportional zum Quadrat der Feldstärke. Die mathematische Formulierung wird aus der Fourieranalyse eines Einzelimpulses gewonnen.

Koppe (Vancouver).

Seitz, Frederick: On the theory of electron multiplication in crystals. *Phys. Rev.*, Lancaster Pa., **II**, **S.** **76**, 1376—1393 (1949).

Es gibt zwei Erklärungen für den elektrischen Durchschlag fester Isolatoren: die „Feldemissionstheorie“ (diese glückliche Bezeichnung scheint vom Verf. geprägt zu sein) von Zener und Franz, nach welcher starke Felder Isolatorelektronen mittels Tunneffekt ins Leitungsband ziehen, und die Stoßionisationstheorie nach von Hippel und Fröhlich, welche annimmt, daß sich im Ionengitter gegen die bremsende Wirkung der optischen Gittereigenschwingungen Elektronenlawinen ausbilden. Hieran übt Verf. Kritik und weist nach, daß die akustischen Gitterschwingungen ebenso stark bremsen, ja, daß praktisch sogar nur die akustischen Schwingungen mitsprechen. Die optischen Schwingungen bremsen nämlich hauptsächlich Elektronen von etwa 1/10 Volt, die akustischen bevorzugt solche von einigen Volt: die Stoßionisation tritt aber, wie Verf. zeigt, in der Regel erst ein, wenn die Energie

des stoßenden Elektrons bereits etwa ein Volt über der Ionisierungsenergie liegt, so daß das resultierende Elektronenpaar schon soviel Energie besitzt, daß es von den optischen Schwingungen unbehindert direkt gegen die akustischen Schwingungen anläuft. — Verf. zeigt weiter, daß man nicht nur die durchschnittliche Bremsung, sondern auch deren statistische Schwankungen berücksichtigen muß; am Temperaturnullpunkt erniedrigt sich dadurch die Durchschlagsfeldstärke etwa auf $1/5$. [Anm. d. Ref.: Verf. ist entgangen, daß diese Rechnung bereits von W. Franz, Z. Physik 113, 607—636 (1939); dies. Zbl. 22, 41 für beliebige Temperaturen durchgeführt wurde, mit dem Ergebnis, daß für Zimmertemperatur die statistischen Schwankungen keine wesentliche Rolle mehr spielen. Hierdurch läßt sich erklären, daß die vom Verf. errechnete Durchschlagsfeldstärke für NaCl um einen Faktor $1/5$ kleiner ist als die experimentelle.] — Bei Alkalihalogeniden sprechen Größe und Temperaturabhängigkeit der Durchschlagsfeldstärke für die Stoßionisationstheorie, bei Diamant sowie flüssigen und festen Edelgasen läßt sich eine Entscheidung zwischen dieser und der Feldemissionstheorie noch nicht treffen.

W. Franz (Münster).

Callen, Herbert B.: Electric breakdown in ionic crystals. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1394—1402 (1949).

Die elektrische Durchschlagsfeldstärke von Ionenkristallen nach der Stoßionisationstheorie wird neu berechnet. Dabei berücksichtigt Verf. gleich von Hippel und Fröhlich als bremsend nur die Zusammenstöße mit den optischen Gitterschwingungen (s. hierzu das vorangeh. Referat!), verbessert jedoch die Fröhlichsche Berechnung, indem er erstens die Polarisierbarkeit der Substanz in Rechnung setzt, und zweitens das zweifelhafte Fröhlichsche Durchschlagskriterium („high energy criterion“: nur die Elektronen, welche bereits Ionisierungsenergie besitzen, müssen durch das Feld stärker beschleunigt als durch die Stöße gebremst werden) durch das alte von Hippelsche Kriterium („low energy criterion“: alle Elektronen mit Energien zwischen Null und Ionisierungsenergie müssen stärker beschleunigt als gebremst werden) ersetzt. Die errechneten Feldstärken stimmen im allgemeinen befriedigend mit den gemessenen Werten überein.

W. Franz (Münster).

Lomer, W. M.: The forces between floating bubbles and a quantitative study of the Bragg „bubble model“ of a crystal. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 660—673 (1949).

Verf. führt quantitative Betrachtungen zum Braggschen Seifenblasenmodell eines Kristalls durch. Die elastischen und plastischen Eigenschaften eines solchen Modell-Gitters werden abgeleitet und stimmen für kleine Blasendurchmesser mit den experimentellen Daten recht gut überein.

Leibfried (Göttingen).

Halpern, Otto and Edward Gerjuoy: Small angle diffraction of neutrons and similar wave phenomena. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1117—1129 (1949).

Es wird nach der geometrischen Theorie der Kristallgitterbeugung (also unter Beschränkung auf Mikrokristalle) die Intensität der unter sehr kleinem Ablenkwinkel in einem kubischen, durch Ebenen senkrecht zu den kristallographischen Achsen begrenzten Kristall abgelenkten Strahlung berechnet. Ist $Z = N^3$ die Gesamtzahl der streuenden Atome, $N \cdot a$ die ungefähre Kantenlänge des Kristalls und λ die Wellenlänge der aus beliebiger Richtung einfallenden Welle, so ergibt sich der integrale Wirkungsquerschnitt der bis zu Winkeln von der Größenordnung $\lambda/\pi Na$ ($\ll 1$) abgelenkten Strahlung proportional zu $Z^{4/3}$. Fällt die Strahlung in Richtung einer der kristallographischen Achsen ein, so ist der integrale Wirkungsquerschnitt für die Streuung innerhalb Winkeln der Größenordnung $(\lambda/\pi Na)^{1/2}$ ($\ll 1$) proportional $Z^{7/6}$. Diese einfach zu gewinnenden Resultate werden unter Überwindung mathematischer Schwierigkeiten angewandt auf die Streuung durch eine Gesamtheit willkürlich (d. h. ohne Vorzugsrichtung) gegeneinander orientierter Mikrokristalle und verglichen mit der Streuung unter kleinem Winkel durch ein amorphes Parallelepiped, dessen

Brechungsindex von demjenigen seiner Umgebung nur wenig abweicht, sowie mit der Streuung an anders begrenzten Mikrokristallen und an nicht idealen Einkristallen. Die Streuintensität erweist sich von Orientierung und Beschaffenheit des Streuers abhängig, was eine Deutung experimenteller Ergebnisse von Hughes, Burgy, Heller und Wallace [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 344 (1949)] über die Verbreiterung von Neutronenstrahlen beim Durchgang durch Eisen sowie einen Hinweis auf möglicherweise meßbare Polarisierungseffekte an Neutronen beim Durchgang durch Ferromagnetica erlaubt. *A. Seeger* (Stuttgart).

Niggli, Paul: Die zu einem Koordinatenwert gehörigen Auswahlregeln der Röntgeninterferenzen in verschiedenen Raumsystemen. Z. angew. Math. Phys., Basel 1, 71—74 (1950).

Obwohl die allgemeinen Auslöschungsgesetze für Röntgeninterferenzen für alle Raumgruppen bekannt sind, werden sie häufig nicht voll ausgenutzt und z. B. auch in den internationalen Tabellen nur für Punktlagen mit speziellen Symmetriebedingungen angegeben. Verf. gibt folgendes Verfahren zur Bestimmung der Basispunkte x , y , z eines Gitterkomplexes an: Man untersucht, ob es Auslöschungen gibt, die nur von x , nicht aber von y und z abhängen und verfährt in gleicher Weise mit y und z . Das Verfahren wird am Beispiel der Raumgruppe D_{2h}^8 mit Hilfe der Charakterentafel [Acta Crystallographica (1950)] erläutert. Es ergibt sich: Haben x , y und z je die Werte 0 oder $1/2$ bzw. $1/4$ oder $3/4$, so sind Auslöschungen vorhanden für ungerade Werte von $(h + l)$ bzw. l für x , von l bzw. $(k + l)$ für y und von h bzw. $(h + l)$ für z . Daraus lassen sich leicht die allgemeinen Auslöschungsgesetze gewinnen. *A. Kochendörfer* (Stuttgart).

Buerger, M. J.: Fourier summations for symmetrical crystals. Amer. Mineralogist 34, 771—788 (1949).

Als Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 33, 390) wird hier auf dem Theorem der reziproken Symmetrie und dem Additivitätstheorem, demzufolge die Transformierte einer Summe gleich der Summe der Transformaten ist, basierend die Anwendung von Symmetrieprinzipien auf die Reduktion von Termen bei Fouriersynthesen besprochen. Für die 17 ebenen Gruppen wird der Ausdruck für die Elektronendichte $\rho(x, y)$ in möglichst kompakter Form abgeleitet (zugleich als Projektion von dreidimensionalen Strukturen benutzbar). — Die Methode kann auf jede (dreidimensionale) Raumgruppe angewandt werden. *W. Nowacki* (Bern).

Kochendörfer, Albert: Zur Theorie der Gleitverfestigung (mit Beschreibung eines Verfestigungsmodells). Z. Phys. 126, 548—568 (1949).

Verf. betrachtet die Verhältnisse bei der Verfestigung von Metall-Kristallen unter der Annahme, daß 1. die Bildung und Auflösung einer Versetzung durch eine thermische Aktivierungsenergie beschrieben werden können; 2. diese Energie von der Zahl der gebundenen Versetzungen (d. i. also im wesentlichen die Abgleitung) abhängt; 3. die Bildung der Versetzungen die entscheidende Größe für die Gleitung ist. Damit ist auch die Verfestigung unmittelbar durch die erschwerte Bildung von neuen Versetzungen mit der Abgleitung verknüpft. Die Verhältnisse werden diskutiert und einer Theorie von Mott und Nabarro gegenübergestellt, in welcher die Verfestigung auf den Einfluß innerer Spannungen zurückgeführt wird. Der springende Punkt wird postuliert, nämlich die Möglichkeit der thermischen Versetzungsbildung und die vorliegenden energetischen Verhältnisse. Zunächst ist also der unmittelbare Zusammenhang mit der Versetzungstheorie nicht gegeben. Ein mechanisches Verfestigungsmodell wird beschrieben. *Leibfried* (Göttingen).

Kochendörfer, Albert: Kinetische Theorie der Viskosität amorpher Stoffe. Z. Naturforsch. 3a, 329—340 (1948).

Die vom Verf. benutzten Vorstellungen beim plastischen Fließen von Kristallen unter kleinen Schubspannungen werden auf die Viskosität glasartiger Substanzen und metallischer Schmelzen angewandt. In beiden Fällen existiert eine

lineare Beziehung zwischen Schubspannung und Fließgeschwindigkeit. Wesentlich ist dabei, daß für Flüssigkeiten ein Schubmodul von derselben Größe wie der festen Körper existiert, wobei dieser Schubmodul nur für kurzzeitige Vorgänge eine Bedeutung hat. Die Übereinstimmung mit den Messungen ist durchaus befriedigend.

Leibfried (Göttingen).

Domb, C.: Order-disorder statistics. II. A two-dimensional model. *Proc. R. Soc., London*, A **199**, 199—221 (1949).

In der 1. Mitteilung [*Proc. R. Soc. London A* **196**, 36 (1949)] wurde gezeigt, daß eine große Zahl von Problemen der klassischen statistischen Mechanik auf die Bestimmung der größten Eigenwerte von unendlichen Matrizen mit charakteristischer Struktur zurückgeführt werden kann. Die Elemente dieser Matrizen sind Funktionen der beiden Variablen $z = \exp(-\epsilon_{12}/kT)$ und $\mu = \exp(-2mH/kT)$, wobei ϵ_{12} die Wechselwirkungsenergie zwischen 2 Atomen ist und mH im Falle ferromagnetischer Probleme die magnetische Dipolenergie bezeichnet und im Falle fester Lösungen mit der Konzentration verknüpft ist (aus der Einleitung der vorliegenden Mitteilung entnommen). In der vorliegenden Mitteilung werden in dieser Weise die Verteilungsfunktionen für zweidimensionale quadratische Gitter berechnet. Dazu werden die Eigenvektoren und Eigenlösungen in Potenzreihen entwickelt, was zunächst für endliche Matrizen, aber nach Einführung geeigneter Größen auch für unendliche Matrizen durchgeführt werden kann. Für ferromagnetische Stoffe können ohne äußeres Feld ($\mu = 1$) auf Grund einer empirischen Symmetriebeziehung die Reihenglieder berechnet werden, das Ergebnis entspricht vermutlich dem der Onsagerschen Theorie. Bei Gegenwart eines äußeren Feldes ergeben sich mehrere Glieder für die Magnetisierung und für die Remanenz. Eine Untersuchung der allgemeinen Reihe führt zu der Vermutung, daß die spezifische Wärme bei Anwesenheit eines Feldes kontinuierlich bleibt. Die Anwendung der Theorie auf binäre Lösungen ergibt, daß die Löslichkeitskurve formal in enger Beziehung zur Magnetisierungskurve steht (Löslichkeit bzw. Magnetisierung je als Funktion von z). *A. Kochendörfer*.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Belorizky, David: Nouvelle méthode de calcul des éphémérides et des corrections des éléments des étoiles doubles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 893—895 (1948).

Die Ephemeriden der Doppelsterne, die man gewöhnlich aus den Elementen der wahren Bahn rechnet, lassen sich nach diesen Formeln unmittelbar aus den Elementen der scheinbaren Bahn bestimmen. Verf. führt außerdem die Formeln zur Verbesserung dieser scheinbaren Elemente sowie zur Ermittlung der wahren Bahn aus der scheinbaren an.

Bödewadt (Brunoy).

Mestel, L.: On the thermal conductivity in dense stars. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **46**, 331—338 (1950).

In Sternen kleiner Masse, in denen die Temperaturen verhältnismäßig niedrig und die Dichten verhältnismäßig hoch sind, spielt die Wärmeleitfähigkeit des ganz oder teilweise entarteten Elektronengases eine wichtige Rolle. Bei der Berechnung dieser Wärmeleitfähigkeit muß den Abweichungen von der Fermi-Dirac-Verteilung Rechnung getragen werden, die zum Teil auf den Temperaturgradienten im Sterninneren und zum Teil auf die Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomkernen zurückzuführen sind. R. E. Marshak hat dieses Problem bereits für den Fall sehr starker und sehr schwacher Entartung behandelt. Verf. untersucht nun insbesondere auch den dazwischen liegenden Bereich, der vor allem für Sterne in der Nähe des unteren Endes der Hauptreihe von Wichtigkeit sein dürfte. *H. Vogt* (Heidelberg).

Gold, T.: A thermodynamic consideration in relation to acoustic energy in stellar models. *Monthly Not. astron. Soc., London* **109**, 115—116 (1949).

Seit einigen Jahren ist mehrfach der Schall als Mechanismus des Energietrans-

ports auf den Sternen betrachtet worden: Die in Konvektionszonen ständig entstehenden Druckschwankungen laufen (wenigstens in bestimmten Frequenzbereichen) als fortschreitende Druckwellen nach außen und transportieren so mechanische Energie. Richardson und Schwarzschild haben auf Grund dieses Mechanismus die Existenz einer isothermen Zone um einen konvektiven Kern für die roten Riesensterne postuliert. In vorliegender Note wird gezeigt, daß nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik nur ein bestimmter Druckteil der in der Konvektionszone umgesetzten Energie in mechanische Energie übergehen und als solche nach außen fließen kann; ein anderer bestimmt nicht kleiner Teil muß als Wärmeenergie nach außen fließen, so daß der Temperaturgradient im Sterninnern nirgends verschwinden kann.

L. Biermann (Göttingen).

Prasad, Chandrika: Radial oscillations of a stellar model. Monthly Not. astron. Soc., London 109, 103—107 (1949).

Das betrachtete Modell ist charakterisiert durch eine Verteilung der Dichte von der Form $\rho_c(R^2 - r^2)/R^2$ (r Mittelpunktsabstand, R Radius, ρ_c Massendichte im Sternmittelpunkt). Es werden die Eigenschwingungsperioden adiabatischer radialer Pulsationen kleiner Amplitude für 4 verschiedene Verhältnisse der spezifischen Wärmen (c_p , c_v) berechnet, und zwar für die Grundschiwingung und die ersten 3 Oberschwingungen. Das besondere Gesetz der Dichteverteilung gestattet Lösungen der (bekannten) Differentialgleichung des Problems in Form von Reihenentwicklungen, für deren Koeffizienten einfache Ausdrücke angegeben werden. Physikalisch weist das Modell eine nur schwache Konzentration der Masse zum Mittelpunkt hin auf ($\rho_c : \bar{\rho} = 5 : 2$, $\bar{\rho}$ mittlere Dichte des Sterns). *L. Biermann*.

Tuominen, Jaakko: On the appearance of vortex movements in the sun. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 52, 747—759 (1949).

Verf. betrachtet Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen für die rotierende Sonne, welche eine stationäre gestörte Rotation darstellen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die ungestörte Winkelgeschwindigkeit hängt nur vom Achsenabstand ab; die Temperaturverteilung und das Gravitationspotential werden durch die Störung nicht beeinflusst; die Komponenten der Störgeschwindigkeit und die Druck- und Dichteschwankung seien $\sim \cos n\omega$ bzw. $\sin n\omega$ (n Zahl, ω heliographische Länge in einem ruhenden Koordinatensystem), wo n groß (zu $\approx 10^2$) angenommen wird; der Aufbau entspreche im ganzen einer polytropen Gaskugel vom Index 3. Die Zustandsänderungen werden also nicht als adiabatisch angesehen. Die resultierenden Bewegungen sind im wesentlichen auf die äußersten Teile der Sonne beschränkt und stellen keine Wirbel dar. Ihre Hauptkomponente ist die radiale. In einem mitrotierenden Koordinatensystem erscheinen sie als Vibrationen mit der Periode T_0/n , wo T_0 die Rotationsperiode ist. *L. Biermann* (Göttingen).

Barber, N. F. and F. Ursell: The reponse of a resonant system to a gliding tone. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 39, 345—361 (1948).

In der Arbeit wird die Theorie eines Gerätes behandelt, das zur harmonischen Analyse von Ozeanwellen entwickelt worden ist. Die Aufzeichnung der Wellenbewegung in Form einer variablen Schwarz-Weiß-Fläche wird dabei, zum Zylinder gerollt, auf ein rotierendes Rad gebracht und photoelektrisch abgetastet. Der Strom der Photozelle speist ein Vibrationsgalvanometer, das nacheinander auf alle Fourierkomponenten der Aufzeichnung anspricht, wenn man das auf hohe Drehgeschwindigkeit gebrachte Rad einfach auslaufen läßt. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach dem zeitlichen Verlauf des Galvanometerausschlags $x(t)$ unter der Wirkung einer Wechselkraft mit veränderlicher Frequenz wichtig. Die Differentialgleichung $d^2x/dt^2 + 2n\omega(dx/dt) + \omega^2 x = E(t)/M$ für $x(t)$ hat die Lösung

$$(1) \quad x = \frac{1}{\omega\sqrt{1-n^2}} \int_{-\infty}^t \frac{E(\tau)}{M} e^{-n\omega(t-\tau)} \sin[\omega\sqrt{1-n^2}(t-\tau)] d\tau.$$

Für $E(t)$ nehmen die Verff. eine mit der Zeit lineare Abnahme der momentanen Frequenz an: $E = E_0 \sin \varphi(t) = E_0 \sin [\omega \sqrt{1-n^2} t (1 - \frac{1}{2} a t)]$ und erhalten damit aus (1) für $n^2 \ll 1$, $a t < 1$ eine Näherungslösung der Form

$$(2) \quad x = \frac{E_0}{M \omega} [A(t) \sin \varphi(t) - B(t) \cos \varphi(t)],$$

wo $A(t)$, $B(t)$ mit der Zeit langsam veränderliche Funktionen sind, die durch verallgemeinerte Fresnelsche Integrale dargestellt werden. Der Verlauf der Amplitude $\sqrt{A^2 + B^2}$ für verschiedene Werte des maßgebenden Parameters $k = a/2n^2\omega$ ist numerisch ausgewertet. Die Maximalamplitude wird kurz nach dem Durchgang der anregenden Frequenz durch die Resonanzfrequenz erreicht; sie bleibt stets unter der Resonanzamplitude, die bei stationärer erzwungener Schwingung angenommen wird, und zwar um so mehr, je geringer die Dämpfung des Systems ist, je langsamer es also einschwingt. Das Ausschwingen erfolgt unter Schwebungen. Hinsichtlich des Auflösungsvermögens der Anordnung ergibt sich für den Parameter ein günstigster Wert $k = 3,1$. — In einem zweiten Teil untersuchen Verff. den Fall fester Erreger-, aber zeitabhängiger Eigenfrequenz unter Zugrundelegung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 (1 + \lambda t) x = \frac{E_0 \sin(\omega t + \varepsilon)}{M}.$$

Für Zeitintervalle, die der Bedingung $\lambda t \ll 1$ genügen, gelangen sie zu der Näherungslösung

$$x = \frac{E_0}{M \omega} \int_{-\infty}^t \sin(\omega \tau + \varepsilon) \cdot e^{-(n\omega + \lambda/4)(t-\tau)} \sin \omega [t - \tau - \frac{1}{4} \lambda (t^2 - \tau^2)] d\tau,$$

und aus dieser folgt eine durch $\frac{E_0}{M \omega} e^{-\lambda t/2} \sqrt{A^2 + B^2}$ gegebene zeitabhängige Amplitude der erzwungenen Schwingung, wobei $A(t)$ und $B(t)$ dieselben Funktionen wie in (2) sind.

A. Schoch (Göttingen).

Argence, Émile et Karl Rawer: Calcul du décrement d'absorption relatif à une couche ionosphérique parabolique dans le cas d'une incidence oblique. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 69—70, (1950).

Die Absorption in einer Ionosphärenschicht ist strahlenoptisch gegeben durch das längs des Strahles erstreckte Integral

$$\delta = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\nu}{2c} \frac{\nu - \mu^2}{\mu} \frac{d\xi}{\cos \alpha},$$

wo α der Winkel zwischen der Strahl tangente und dem Radiusvektor vom Aufpunkt zum Erdmittelpunkt, ξ die Höhe des Aufpunktes (gemessen von der Stelle maximaler Ionisation) ist. Setzt man für die Stoßfrequenz ν der Elektronen Proportionalität mit der Gasdichte und für diese die übliche exponentielle Höhenabhängigkeit an und für den Brechungsindex μ die Abhängigkeit von der Frequenz f der benutzten Wellen und von der Höhe $\mu = 1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^2\right\}$, so läßt sich das Integral mit Benutzung des elementaren Brechungsgesetzes auf die Form bringen ($\eta = f_0/f$, $\alpha_0 =$ Inzidenzwinkel, ξ_m , H und ν_0 charakteristische Konstante der Schicht, $\varepsilon = \xi_m/R \ll 1$, $R =$ Erdradius)

$$\delta = \frac{\nu_0}{2c} \eta^2 \xi_m \int_{y_2}^{y_1} \frac{e^{-\xi_m y/M} (1 - \eta^2) dy}{(\eta^2 y^2 + 2\varepsilon \sin^2 \alpha_0 \cdot y + \cos^2 \alpha_0 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Im Fall der Reflexion ($\eta > \cos \alpha_0$) stellen die Verff. unter Vernachlässigung in ε quadratischer und höherer Glieder δ durch einen expliziten Ausdruck dar mit Hilfe früher [C. r. Acad. Sci., Paris 229, 996—997 (1949); Rev. Gén. Electricité 54, 243 (1945)] eingeführter und berechneter Funktionen.

R. Seeliger (Greifswald).